超越数论基础

于秀源

目　　录

第一章　代数数的基本知识

代数数与超越数构成全体复数．因此，任何关于代数数或超越数的命题常具有二重性．例如，对于代数数的必要条件，可以构成对于超越数的充分条件．所以，做为预备部分，本章主要叙述以后各章内容所涉及的代数数的基本概念和知识，以及有关多项式的几个定理．对于一些熟知的定理，将证明略去了．

第一节　多　项　式

下面提到的多项式，都是指系数为有理数的多项式．

定理1．对于任意的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，$g(x)\neq 0$，必有多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $r(x)\equiv 0$，或者是一个次数低于 $g(x)$ 的多项式．

两个多项式如果没有非常数的公因式，则称它们是互素的．

定理 2．多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是，存在多项式 $A(x)$ 与 $B(x)$，使得

$$A(x)f(x)+B(x)g(x)=1.$$

多项式 $f(x)$ 如果没有次数比它低的非常数多项式因子，则称它是不可化的．

定理3．每个 $n(>0)$ 次多项式 $f(x)$，都可以分解成不可

化多项式的乘积．此外，若不计常数因子的差异及因子的次序，则这种分解式是唯一的．

定理4．设 $f(x)$ 是有理系数的 $n(>0)$ 次多项式，如果可以分解成两个次数低于 n 的多项式之积，那么，$f(x)$ 以两个次数低于 n 的有理整系数多项式为其因式．

定理5．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是多项式，而且 $f(x)$ 是不可化的．若 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 有公共根，则 $f(x)\mid g(x)$．

由此定理可知，若 $f(x)$ 是有理系数的不可化多项式，则它的零点各不相同．

以下，讨论任意复系数多项式．

设多项式

$$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m(m>0)$$

与

$$g(x)=b_0x^n+\cdots+b_n(n>0)$$

的全部零点分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，称 $m+n+2$ 阶行列式

$$Res(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1\cdots a_m & 0\cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1\cdots a_m & \cdots\ 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & \cdots\cdots 0 & a_0 & a_1\cdots a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots b_n\ 0 & \cdots\cdots 0 \\ 0 & b_0 & b_1\cdots b_n & \cdots\cdots 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & \cdots 0 & b_0 & b_1\cdots\cdots b_n \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式．

定理6．

$$Res(f,g)=a_0^n\prod_{i=1}^m g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^m\prod_{i=1}^n f(\beta_i).$$

此外，$f(x)$与$f'(x)$有公共零点的充要条件是

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)^2=0,$$

其中 $D(f)$称为$f(x)$的判别式.

设$f(x_1,\cdots,x_n)$是n元多项式. 如果对于n个变量x_1, $\cdots$, x_n的下标集{1, 2, $\cdots$, n}进行任意一个置换后,$f(x_1$, $\cdots$, $x_n)$都不改变，则称$f(x_1, \cdots, x_n)$是n元对称多项式.

称

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_n,$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$$

为$x_1,\cdots,x_n$的初等对称多项式.

定理7. 任何的系数在数环R中的n元对称多项式都可以唯一地表示为初等对称多项式$\sigma_1,\cdots,\sigma_n$的多项式，而且它的系数也在R中.

第二节 代 数 数

在本书中，将以C，R，Q分别表示复数域、实数域和有理数域，以Z表示整数环，以N表示全体自然数的集合。此外，对于数集K，以K[t]表示形如

$$a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_m$$

的多项式的集合，其中 $a_i \in \mathbf{K}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$.

定义1. 设

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbf{Z}[x], (a_0 \neq 0). \quad (1)$$

若数 α 是 $f(x) = 0$ 的根，则称 α 是代数数.

若 $f(x)$ 是不可化多项式（即不存在非常数的 $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 与 $h(x) \in \mathbf{Z}[x]$，使 $f(x) = g(x)h(x)$)，而且 $a_0, \cdots, a_n$ 互素：

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n) = 1,$$

则称 $f(x)$ 是 α 的最小多项式，α 是 n 次代数数，并称

$$h(\alpha) = \max_{0 \leq i \leq m} |a_i|$$

是 α 的高.

例如，i 是二次代数数，$x^2 + 1$ 是它的最小多项式，$h(i) = 1$.

代数数也可定义为"系数为有理数的代数方程的根".

由定理5，代数数的最小多项式是唯一的.

定理8. 若 α，β 是代数数，则 $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ 以及 $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ 都是代数数.

证明. 以 $\alpha\beta$ 为例，设 $\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta = \beta_1, \cdots, \beta_n$ 分别是 α 与 β 的最小多项式的全部零点，而且这两个多项式的最高幂项系数分别为 $a_0(\neq 0)$ 与 $b_0(\neq 0)$，则 $\alpha\beta$ 满足方程

$$h(x) = (a_0 b_0)^{mn} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_i \beta_j) = 0.$$

由多项式系数与零点的关系以及定理7，可知 $h(x)$ 是有理整系数多项式，所以，$\alpha\beta$ 是代数数.

证毕.

由定理8，全体代数数构成一个数域.

定义 2．若代数数 α 的最小多项式的最高幂项的系数为1，则称它为代数整数．

定理 9．代数整数若是有理数，则必是有理整数．代数整数的和、差、积仍是代数整数．

定理10．设 α 是方程

$$Q(x)=\beta_0x^n+\beta_1x^{n-1}+\cdots+\beta_n=0$$

的根，其中 $\beta_i(0\leqslant i\leqslant n)$是代数整数，则 $\beta_0\alpha$ 是代数整数．

证明．由 $Q(\alpha)=0$可知 $\beta_0\alpha$ 满足方程

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x)&=x^n+\beta_1(\beta_0x)^{n-1}+\cdots+\beta_n\beta_0{}^{n-1}\\&=x^n+\gamma_1x^{n-1}+\cdots+\gamma_n=0.\end{aligned}$$

由定理8，上式中的$\gamma_i(1\leqslant i\leqslant n)$是代数整数，设 γ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$的最小多项式的全部零点为

$$\gamma_i=\gamma_i{}^{(1)},\ \gamma_i{}^{(2)}\cdots,\gamma_i{}^{(d_i)},$$

其中 d_i 是γ_i 的次数，则由对称函数的性质，知

$$Q^*(x)=\prod_{j_1=1}^{d_1}\cdots\prod_{j_n=1}^{d_n}(x^n+\gamma_1{}^{(j_1)}x^{n-1}+\cdots+\gamma_n{}^{(j_n)})$$

是系数为有理整数的多项式，其首项系数为1．
显然 $Q^*(\beta_0\alpha)=0$，因此 $\beta_0\alpha$ 是代数整数．

证毕．

定理11．设

$$f(x)=a_0x^d+a_1x^{d-1}+\cdots+a_d=a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_d),$$

其中$a_i\in\mathbf{Z}(0\leqslant i\leqslant d)$，则对于$\{1,2\cdots,d\}$的任一子集$\{i_1,\cdots,i_k\}$，$a_0\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}$是代数整数．

证明．首先，我们指出，如果

$$P(x)=\lambda_0 x^m+\lambda_1 x^{m-1}+\cdots+\lambda_m$$

是以代数整数为系数的多项式，$P(\alpha)=0$，则$\dfrac{P(x)}{x-\alpha}$也是以代数整数为系数的多项式.

事实上，当 $m=1$ 时，结论是显然的。假定结论对于 m 成立，那么，对于 $m+1$ 次多项式

$$P(x)=\lambda_0 x^{m+1}+\lambda_1 x^m+\cdots+\lambda_{m+1}$$

（λ_0，$\cdots\lambda_{m+1}$是代数整数），$P(\alpha)=0$，由定理可知

$$Q(x)=P(x)-(x-\alpha)\lambda_0 x^m \tag{1}$$

是一个以代数整数为系数的 m 次多项式，而且 $Q(\alpha)=0$. 因此

$$\frac{Q(x)}{x-\alpha}=\frac{P(x)}{x-\alpha}-\lambda_0 x^m \tag{2}$$

是一个以代数整数为系数的多项式，因而$\dfrac{P(x)}{x-\alpha}$也是以代数整数为系数的多项式. 这样，由归纳法得到上面提到的结论.

现在证明定理结论. 依次应用已经证得的结论，可知

$$P(x)\prod_{\substack{i\neq i_j\\ 1\leqslant j\leqslant k}}\frac{1}{x-\alpha_{i_j}}=a_0\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_{i_j})$$

是以代数整数为系数的多项式，它的常数项

$$(-1)^k a_0\,\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}$$

当然是代数整数，由此证得定理.

证毕.

定义8. 若 α 与$\dfrac{1}{\alpha}$都是代数整数，则称 α 为单位数.

定理12. α 是单位数的充要条件是：α 满足一个首项系数为1，而且末项系数为±1的有理整系数方程.

证明. 由定义可推出.

第三节　有理数域的扩张

设 α 是 n 次代数数，记

$$\mathbf{E}=\{a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1};\ a_i\in\mathbf{Q},0\leqslant i\leqslant n-1\}.$$

定理13. $\mathbf{E}$ 是一个数域。此外，若

$$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\neq(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}),$$

其中 $a_i\in\mathbf{Q}$，$b_j\in\mathbf{Q}$ $(0\leqslant i,\ j\leqslant n-1)$，则

$$a_0=a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\neq b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

证明. 设 α 的最小多项式为 $f(x)$. 又设

$$\lambda=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=a(\alpha)\in\mathbf{E},$$

$$\mu=b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}=b(\alpha)\in\mathbf{E},$$

则 $\lambda\pm\mu\in\mathbf{E}$ 是显然的. 下面证明 $\lambda\mu$ 以及 $\frac{1}{\mu}$ $(\mu\neq0)$ 也都在 $\mathbf{E}$ 内，从而$\mathbf{E}$是一个域. 以 $deg\ P(x)$ 表示多项式 $P(x)$ 的次数.

由定理1可知，存在有理系数多项式 $g(x)$ 与 $r(x)$，使得

$$a(x)b(x)=g(x)f(x)+r(x),\ deg\ r(x)<deg f(x)=n,$$

因此，由 $f(\alpha)=0$ 得到

$$\lambda\mu=a(\alpha)b(\alpha)=g(\alpha)f(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)\in\mathbf{E}.$$

当 $\mu\neq0$时，由于 $f(x)$ 是不可化多项式，所以 $b(x)$ 与 $f(x)$互素，从而存在有理系数多项式 $p(x)$与 $s(x)$，使得

$$p(x)\ b(x)+s(x)\ f(x)=1,\quad deg\ p(x)<deg\ f(x)=n,$$

因此

$$p(\alpha)\mu = p(\alpha)b(\alpha) + s(\alpha)f(\alpha) = 1,$$

$$\mu^{-1} = p(\alpha) \in \mathbf{E}.$$

最后，如果$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$，但是

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1},$$

那么α满足一个次数$\leqslant n-1$的代数方程，从而是一个次数$\leqslant n-1$的代数数，这与假设矛盾。所以定理的最后一个结论得证。

证毕。

定义4．设α是n次代数数，则数域

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1},\ a_i \in \mathbf{Q}, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$$

称为有理数域$\mathbf{Q}$添加α所得到的单扩张，并称为n次代数数域，记$n = [\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$．

定理14．若代数数$\alpha \neq 0$，则$\mathbf{Q}(\alpha)$即是α经过加、减、乘、除（除数不为零）运算所得到的最大数集．

证明．略．

定义5．由有限个代数数$\alpha_1, \cdots \alpha_k$经加、减、乘、除（除数不为零）运算后所得到的数域，称为$\mathbf{Q}$上的有限扩张，记为$\mathbf{Q}(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$．

定理15．对于任何$\mathbf{Q}$上的有限扩张$\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \cdots, \gamma)$，总存在代数数$\lambda$，使得

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\alpha, \beta, \cdots \gamma).$$

证明．仅就$k=2$的情形证明．对于$k>2$，可由归纳法及此处的方法给出证明．

设α与β的最小多项式的全部零点分别为

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ 与 } \beta = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m,$$

取有理数h，使得

$$h \neq \frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_k - \alpha_l} (1 \leqslant k,\ l \leqslant n,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m),$$

于是 mn 个数 $h\alpha_j + \beta_k (1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m)$ 各不相同．
记

$$\lambda = h\alpha + \beta,$$

则 λ 是代数数，且满足方程

$$F(x) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (x - (h\alpha_j + \beta_k)) = 0.$$

令

$$H(x) = F(x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_j}{x - (h\alpha_j + \beta_k)}, \qquad (3)$$

则由对称函数的性质可知，$F(x)$ 与 $H(x)$ 都是有理系数的多项式，而且，（3）式导出

$$H(\lambda) = F'(\lambda)\alpha.$$

但是 $F(x)$ 没有重零点，所以 $F'(\lambda) \neq 0$，从而

$$\alpha = \frac{H(\lambda)}{F'(\lambda)},$$

即 $\alpha \in \mathbf{Q}(\lambda)$，因此

$$\beta = \lambda - h(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha).$$

于是

$$\mathbf{Q}(\alpha, \beta) \subseteq \mathbf{Q}(\lambda).$$

由此及显然的关系式

$$\mathbf{Q}(\lambda) \subseteq \mathbf{Q}(\alpha, \beta)$$

即可得出 $\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\alpha, \beta)$．

证毕．

由定理15，$\mathbf{Q}$ 上的有限扩张总可归结为$\mathbf{Q}$ 上的单扩张，因此，可以只讨论单扩张以替代对有限扩张的研究.

定义6. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 与 λ 是代数数，λ 的次数是d . 若

$$\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=\mathbf{Q}(\lambda),$$

则记

$$d=[\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k):\mathbf{Q}].$$

第四节 基　　底

设 λ 是 n 次代数数，$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 λ 的最小多项式的全部零点。

定义7. 设 $\alpha_1=\alpha\in\mathbf{Q}(\lambda)$，

$\alpha=a(\lambda)=a_0\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$，$a_i\in\mathbf{Q}(0\leqslant i\leqslant n-1)$，

称

$$\alpha_k=a(\lambda_k)\qquad(k=2,3,\cdots,n)\tag{4}$$

是 α 在 $\mathbf{Q}(\lambda)$上的共轭数，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 则称为 λ 的共轭数。

定理16. 设 $\alpha\in\mathbf{Q}(\lambda)$是$d$ 次代数数，其最小多项式为 $f(x)$，

$$f(x)=a_0x^d+\cdots+a_d,\quad a_i\in\mathbf{Z}\ (0\leqslant i\leqslant d).$$

又设

$$g(x)=\prod_{v=1}^{n}(x-\alpha_v),$$

其中 α_v 由（ 4 ）式确定，则 $g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，而且

$$g(x)=c(f(x))^l,$$

其中 $l\in\mathbf{N}$，$l|n,c\in\mathbf{Q}$.

证明. 由定理 5 可以推出. 证毕.

由定理16，以 $\alpha=\alpha^{(1)}$，$\alpha^{(2)}$，…，$\alpha^{(d)}$ 表示 α 的最

小多项式的全部零点，则 α 在 $Q(\lambda)$（λ是 n 次代数数）上的全部共轭数恰好是 $\alpha^{(1)}$，…，$\alpha^{(d)}$ 的$\frac{n}{d}$次重复。

定义8．若在 $Q(\lambda)$中存在一组数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，使得对于任意的 $X\epsilon Q(\lambda)$，都有唯一的表示式

$$X=a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m,\ a_i\epsilon Q\ (1\leqslant i\leqslant m),$$

则称α_1，…，α_m 是 $Q(\lambda)$的一组基底．

例如，若 λ 是 n 次代数数，则 $1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1}$ 构成$Q(\lambda)$的一组基底。

定理17．$Q(\lambda)$中的任一组基底所含元素的个数相同．

证明．（略）．

定义9．设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $Q(\lambda)$中的任意 n 个数，$n=[Q(\lambda):Q]$，称

$$\triangle(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)=\begin{vmatrix}\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_n^{(1)}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \alpha_1^{(n)}\cdots\alpha_n^{(n)}\end{vmatrix}^2$$

为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的判别式，其中 $\alpha_i=\alpha_i^{(1)}$，$\alpha_i^{(2)}$，…，$\alpha_i^{(n)}$是 α_i 在 $Q(\lambda)$上的共轭数．

定理18．判别式具有以下性质：

(i)．$\Delta(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\epsilon Q$．

特别地，若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是代数整数，则

$$\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\epsilon Z.$$

(ii)．若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 $Q(\lambda)$ 的两组基底，则

$$\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\cdot\Delta(\beta_1,\cdots,\beta_n)>0.$$

(iii)．$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $Q(\lambda)$ 的一组基底的充要条件，是 $\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$．

证明．(i)．由对称多项式的性质即可得证．

(ii)．设

$$\alpha_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\beta_k\quad(1\leqslant j\leqslant n),$$

其中 $a_{jk}\in\mathbf{Q}(1\leqslant j,k\leqslant n)$，则显然有

$$\alpha_j^{(l)}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\beta_k^{(l)}\quad(1\leqslant l,\ j\leqslant n),$$

因此

$$\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{vmatrix}\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_n^{(1)}\\ \vdots\qquad\vdots\\ \alpha_1^{(n)}\cdots\alpha_n^{(n)}\end{vmatrix}^2$$

$$=|a_{ij}|^2\cdot\begin{vmatrix}\beta_1^{(1)}\cdots\beta_n^{(1)}\\ \vdots\qquad\vdots\\ \beta_1^{(n)}\cdots\beta_n^{(n)}\end{vmatrix}^2$$

$$=|a_{ij}|^2\cdot\Delta(\beta_1,\cdots,\beta_n),\tag{5}$$

其中$|a_{ij}|$表示以 a_{ij} 为其第i行、第j列元素的行列式．

由（5）式可得到结论(ii)．

(iii)．对于基底1，λ，…，λ^{n-1}，有

$$\Delta(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1})=\begin{vmatrix}1 & \lambda\cdots\lambda^{n-1}\\ 1 & \lambda_2\cdots\lambda_2^{n-1}\\ \cdots\cdots\\ 1 & \lambda_n\cdots\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}^2$$

$$=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_k)^2\neq0,$$

由此及结论(ii)，可知当 $1,\alpha\cdots,\alpha_n$ 是一组基底时，

$\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq0$．

另一方面，若 $\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$，令

$$\alpha_i=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\lambda^{k-1}\qquad(1\leqslant j\leqslant n),$$

则由

$$\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=|b_{jk}|^2\Delta(1,\cdots,\lambda^{n-1}),$$

可知行列式 $|b_{jk}|\neq 0$. 因此，$1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1}$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 的一组基底.

证毕.

定义9. 设 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ 是 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 中的代数整数. 若 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 中的任一代数整数都可唯一地表示为

$$a_1\omega_1+\cdots+a_m\omega_m\qquad(a_i\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant i\leqslant m),$$

则称 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ 是 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 的一组整底.

定理19. 在 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 的一切由代数整数所组成的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中，使 $|\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|$ 取最小值的一组基底，必是整底.

证明. 设 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 使得

$$|\Delta(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)|=\min_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}|\Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n|,$$

其中 min 是对由代数整数组成的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 取的. 若 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 不是整底，则必有代数整数 ω，

$$\omega=a_1\omega_1+\cdots+a_n\omega_n,$$

其中至少有一个 a_i 不是有理整数. 设 $a_1\notin\mathbf{Z}$，令

$$a_1=b+c,\ b\in\mathbf{Z}\quad 0<c<1,$$

则

$$\omega_1'=\omega-b\omega_1=c\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_n\omega_n$$

也是代数整数，而且 $\omega_1',\omega_2,\cdots,\omega_n$ 也是 $\mathbf{Q}(\lambda)$ 的一组由整数构成的基底. 此时

$$|\Delta(\omega_1',\omega_2,\cdots,\omega_n)|=c^2|\Delta(\omega_1,\cdots,\omega_n)|$$

$$<|\Delta(\omega_1,\cdots,\omega_n)|,$$

这与ω_1，$\cdots,\omega_n$的选取矛盾。所以ω_1，$\cdots$，ω_n必是一组整底。

证毕.

推论．整底必是基底，因而含有$n=[\mathbf{Q}(\lambda):\mathbf{Q}]$个元素．

定理14．设$\omega_1,\cdots,\omega_n$与$\omega_1',\cdots,\omega_n'$是$\mathbf{Q}(\lambda)$的两组整底，则

$$\Delta(\omega_1,\cdots,\omega_n)=\Delta(\omega_1',\cdots,\omega_n').$$

证明．由于$\{\omega_i\}$与$\{\omega_i'\}$都是整底，所以存在

$$a_{ij}\in\mathbf{Z},\ b_{kl}\in\mathbf{Z}\quad(1\leqslant i,j,k,l\leqslant n),$$

使得

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\omega_j',\qquad \omega_k'=\sum_{l=1}^{n}b_{kl}\omega_l,\ 1\leqslant i,k\leqslant n$$

因此，行列式之积

$$|a_{ij}|\cdot|b_{kl}|=1,$$

所以

$$|a_{ij}|^2=|b_{kl}|^2=1.$$

由此及(5)式得证.

证毕.

第二章　Siegel引理

这一章主要叙述代数数的一些基本性质，它们在超越数的研究中经常用到。

此外，还介绍利用众所周知的 Dirichlet 原则所得到的 Siegel 引理及其推广形式，这是在研究超越数理论时的一个广泛使用的工具.

最后，简单地介绍数的 Mahler 测度及其基本性质.

第一节　代数数的基本性质

定义1. 对于任意的多项式

$$P(x)=b_0x^r+\cdots+b_r,$$

称

$$L(P)=|b_0|+\cdots+|b_r| \text{ 与 } h(P)=\max_{0\le i\le r}|b_i|$$

分别为$P(x)$的"长度"与"高".

显然有

$$L(PQ)\leqslant L(P)\cdot L(Q),\quad h(PQ)\leqslant h(P)h(Q)$$

对于任意的多项式 $P(x)$与$Q(x)$成立.

定义2. 设代数数 α的最小多项式是

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0,$$

则定义 $L(P)$与 $h(P)$分别为 α 的"长度" $L(\alpha)$与"高"$h(\alpha)$：

$$L(\alpha)=L(P),\quad h(\alpha)=h(P).$$

引理1．设 α满足方程

$$A_0x^d+A_1x^{d-1}+\cdots+A_d=0,$$

其中

$$A_i=\sum_{j=0}^{m}a_{ij}\omega^j,\quad a_{ij}\in\mathbf{Z}\ (0\leqslant i\leqslant d,0\leqslant j\leqslant m,m\geqslant 0),$$

则对于任意的自然数 j，有

$$(A_0\alpha)^j=A_{d-1}^{(j)}\alpha^{d-1}+A_{d-2}^{(j)}\alpha^{d-2}+\cdots+A_0^{(j)},$$

其中

$$A_i^{(j)}=\sum_{k=0}^{m_j}a_{ik}^{(j)}\omega^k\qquad a_{ik}^{(j)}\in\mathbf{Z}\ (0\leqslant i\leqslant d-1,$$

$$j\geqslant 1,0\leqslant k\leqslant m),$$

而且

$$|A_i^{(j)}|\leqslant(2\max|A_i|)^j\quad(0\leqslant i\leqslant d-1,\ j\geqslant 1).$$

特别地，若 α 是代数数，则可取 $m=0$，从而 $A_i^{(j)}$ ($0\leqslant i\leqslant d-1$，$j\geqslant 1$)都是有理整数．

证明，首先，对于 $j\geqslant d$，由α 所满足的方程得到，若结论对于 $j-1$ 成立，那么

$$(A_0\alpha)^j=A_0\alpha(A_0\alpha)^{j-1}=A_0\alpha\,(A_{d-1}^{(j-1)}\alpha^{d-1}+\cdots$$

$$+A_0^{(j-1)})=A_0A_{d-1}^{(j-1)}\alpha^d+\sum_{i=0}^{d-2}A_0A_i^{(j-1)}\alpha^{i+1}$$

$$=A_{d-1}^{(j-1)}(-A_1\alpha^{d-1}-A_2\alpha^{d-2}-\cdots-A_d)$$

$$+\sum_{i=0}^{d-2}A_0A_i^{(j-1)}\alpha^{i+1}.$$

因此，对于 $j \geqslant d$，有（规定 $A_{-1}^{(j-1)}=0$）

$$A_i^{(j)} = A_0 A_{i-1}^{(j-1)} - A_{d-i} A_{d-1}^{(j-1)}. \qquad (2)$$

引理结论当 $j \leqslant d-1$ 时显然是成立的．由（2）式并利用归纳法可证得引理．

证毕．

引理2．设 α 是高为 h，次数为 d 的代数数，则当 $\alpha \neq 0$ 时，

$$\frac{1}{h+1} < |\alpha| < h+1.$$

证明．对于任意的 $\lambda > 1$，总有 $|\alpha| < \lambda$，或 $|\alpha| \geqslant \lambda$．

若 $|\alpha| \geqslant \lambda$，设 α 的最小多项式为

$$P(x) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d, \quad \max|a_i| = h,$$

则由

$$a_0 \alpha^d + a_1 \alpha^{d-1} + \cdots + a_d = 0$$

得到

$$a_0 \alpha = -a_1 - a_2 \frac{1}{\alpha} - \cdots - a_d \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{d-1},$$

$$|a_0 \alpha| < h\left(1 + \frac{1}{|\alpha|} + \cdots + \left|\frac{1}{\alpha}\right|^{d-1}\right) \leqslant h \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{h\lambda}{\lambda - 1}.$$

取 $\lambda = h+1$，则

$$|a_0 \alpha| < h+1, \quad |\alpha| < h+1 = \lambda.$$

这与 $|\alpha| \geqslant \lambda$ 矛盾，因此总有 $|\alpha| < h+1$．

由于$\frac{1}{\alpha}(\alpha\neq 0)$也是一个高为$h$的代数数，所以

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|<h+1,\quad |\alpha|>\frac{1}{h+1}.$$

证毕.

定义2. 设α是代数数，定义α的“分母”为

$$m(\alpha)=\min(m;\ m\in\mathbf{N},\ m\alpha\text{是代数整数}).$$

此外，如果$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$是$\alpha$的最小多项式的全部零点，则记

$$\overline{|\alpha|}=\max|\alpha_i|,$$

并称之为α的模.

引理3. 设α是d次非零代数数，则

$$\log|\alpha|\geqslant-(d-1)\log\overline{|\alpha|}-d\log m(\alpha).$$

证明. 设α的最小多项式的全部零点为$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$. 由$m(\alpha)$的定义可知

$$m\alpha_1,\ m\alpha_2,\ \cdots,\ m\alpha_d\quad(m=m(\alpha))$$

都是代数整数，而且满足同一个有理整系数代数方程

$$x_d+b_1x^{d-1}+\cdots+b_d=0.$$

由多项式的根与系数的关系可知

$$1\leqslant\left|\prod_{i=1}^{d}m\alpha_i\right|\leqslant|\alpha|\cdot m^d\prod_{i=1}^{d}|\alpha_i|\leqslant|\alpha|\cdot m^d\cdot\overline{|\alpha|}^{d-1},$$

即

$$\log|\alpha|+d\log m+(d-1)\log\overline{|\alpha|}\geqslant 0.$$

证毕.

引理4. 设α是d次代数数，高为h，$m=m(\alpha)$，则

$$m\leqslant h\leqslant(2m\cdot\overline{|\alpha|}^*)^d,$$

其中 $\overline{|\alpha|}^*=\max(1,\overline{|\alpha|})$.

证明．设 α 的最小多项式为

$$P(x)=a_0x^d+a_1x^{d-1}+\cdots+a_d=a_0\prod_{i=1}^{d}(x-\alpha_i),$$

其中$\alpha=\alpha_1$，则 $a_0\alpha$ 是代数整数，因此，

$$m=m(\alpha)\leqslant|a_0|\leqslant h,$$

此即第一个不等式．

另一方面，由多项式的零点与系数的关系，可知

$$|a_i|\leqslant|a_0|\cdot c_d^i\,\overline{|\alpha|}^i\leqslant|a_0|\cdot 2^d(\overline{|\alpha|}^*)^d,(0\leqslant i\leqslant d). \tag{3}$$

但 $m\alpha$ 是代数整数，故α必满足某个方程

$$Q(x)=(mx)^d+b_1(mx)^{d-1}+\cdots+b_d=0,$$

其中 $b_i\in\mathbf{Z}$ $(1\leqslant i\leqslant d)$，即 α 满足方程

$$H(x)=m^dx^d+b_1m^{d-1}x^{d-1}+\cdots+b_d=0.$$

由于 $P(x)$是不可化多项式，所以

$$P(x)|H(x),$$

于是

$$a_0|m^d,\quad |a_0|\leqslant m^d.$$

由此及（3）式推出

$$h=\max|a_i|\leqslant(2m\,\overline{|\alpha|}^*)^d.$$

证毕．

第二节　Siegel 引理

对于下面的 Dirichlet 原则，大家是熟悉的．

Dirichlet 原则：若将 n 个球放入 $m(<n)$ 个盒子中，

至少有一个盒子含有两个以上的球.

利用这一原则，下面研究某些不定方程的整数解.

定理1. (Siegel).设

$M\in\mathbf{N}$ $N\in\mathbf{N}$, $N>M$,

$a_{ij}\in\mathbf{Z}(1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant j\leqslant N)$, $U=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|(\geqslant 1)$.

则存在一组非零的有理整数 X_1, …, X_N, 使得

$$\max|x_i|\leqslant(NU)^{\frac{N}{N-M}}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\ x_j=0\ (1\leqslant i\leqslant M). \quad (5)$$

证明. 设

$$P_i=\sum_{j=1}^{N}\max(0,a_{ij}),\ \ N_i=\sum_{j=1}^{N}\min(0,a_{ij}),$$

$$(1\leqslant i\leqslant M).$$

又设 $x_j(1\leqslant j\leqslant N)$是满足条件

$$0\leqslant x_j\leqslant\left[(NU)^{\frac{M}{N-M}}\right]$$

的整数，此处[c]表示数 c 的整数部分. 则

$$N_i\left[(MU)^{\frac{M}{N-M}}\right]\leqslant y_i=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\ x_j$$

$$\leqslant P_i\cdot\left[(NU)^{\frac{M}{N-M}}\right]$$

对于任意的 $i(1\leqslant i\leqslant M)$成立. 这样，我们建立了对应关系

$$(x_1,\cdots,x_N)\longrightarrow(y_1,\cdots,y_M),$$

其中，数组（$x_1,\cdots,x_N$）的个数为

$$A=\left(\left[(NU)^{\frac{N}{N-M}}\right]+1\right)^N>(NU)^{\frac{M}{N-M}\cdot N},$$

而数组$(y_1,\cdots,y_M)$的个数为

$$B\leqslant\prod_{i=1}^{M}\left((P_i-N_i)\cdot\left[(NU)^{\frac{M}{N-M}}\right]\right)$$

$$\leqslant(NU)^{\frac{M}{N-M}\cdot M}(NU)^M=(NU)^{\frac{MN}{N-M}}<A.$$

因此，由 Dirichlet 原则必有两个不同的数组 $x_1^{(i)}$，…，

$x_N^{(i)}(i=1,2)$对应着同一数组$(y_1,\cdots,y_M)$.

令

$$x_j=x_j^{(1)}-x_j^{(2)},\quad(1\leqslant j\leqslant N),$$

则 $x_1,\cdots,x_N$ 满足（4）式、（5）式。

证毕。

推论．n 个变量的任意 m（$>n$）个有理系数的线性组合，在有理数域上是线性相关的。

证明．设这 m 个线性形式为

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}r_{ik}x_k\quad(1\leqslant i\leqslant m),$$

其中 $r_{ik}\in\mathbf{Q}$（$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant k\leqslant n$）．显然，适当选取整数 l_i，可以使

$$l_i\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k,\quad a_{ik}\in\mathbf{Z}\ (1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant n).$$

对于任一组整数 $y_1,\cdots,y_m$，有

$$\sum_{i=1}^{m}y_il_i\lambda_i=\sum_{i=1}^{m}y_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{m}a_{ik}y_i.$$

由定理 1，存在不全为零的整数 $y_1^0, \cdots, y_m^0$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i^0 = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^0 l_i \lambda_i = 0,$$

这就证明了 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 在 Q 上的线性相关性.

证毕.

由此推论，可以给出第一章定理8的另一证明：

由引理 1 可知，若代数数 α 与 β 的次数分别为 m 与 n，那么对于任意的自然数 d，都成立等式

$$\alpha^d = a_{m-1}\alpha^{m-1} + a_{m-2}\alpha^{m-2} + \cdots + a_0, a_i \in \mathbf{Q},$$
$$(0 \leqslant i \leqslant m-1),$$
$$\beta^d = b_{n-1}\beta^{n-1} + b_{n-2}\beta^{n-2} + \cdots + b_0, b_i \in \mathbf{Q},$$
$$(0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

因此，$mn+1$ 个数 $(\alpha+\beta)^d$ $(0 \leqslant d \leqslant mn)$ 都可以表示为 mn 个数

$$\alpha^i \beta^j \quad (0 \leqslant i \leqslant m-1, \ 0 \leqslant j \leqslant n-1)$$

的有理系数的线性组合. 由上述推论，这些线性组合在 Q 上是线性相关的，即存在有理数 $r_0, r_1, \cdots, r_{mn}$ 使得

$$r_0 \cdot 1 + r_1(\alpha+\beta) + \cdots + r_{mn}(\alpha+\beta)^{mn} = 0.$$

可见，$(\alpha+\beta)$ 是代数数. 同理可以证明，$\alpha-\beta$，$\alpha\beta$ 以及 $\frac{\alpha}{\beta}(\beta \neq 0)$ 是代数数. 这就是第一章定理 1 的结论.

鉴于定理 1 在超越数论研究中的重要作用，下面给出它的几个推广.

定理2. 设$M, N\in\mathbf{N}$，$N>M$，$a_{ij}(1\leqslant i\leqslant M, 1\leqslant j\leqslant N)$是代数数域 K 中的代数整数，

$$U=\max_{i,j}\left|\overline{a_{ij}}\right|\ (\geqslant 1),$$

则在 K 中存在不全为零的代数整数 $x_1,\cdots,x_N$，使得

$$\max_{1\leq j\leq N}\left|\overline{x_j}\right|\leqslant c_1(c_2NU)^{\frac{M}{N-M}},\tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}x_j=0\quad(1\leqslant i\leqslant M),\tag{7}$$

其中 c_1，c_2，是只与 K 有关的常数.

证明. 以 ω_1，…，ω_n 表示 K 的一组整底，则

$$a_{ij}\omega_k=\sum_{h=1}^{n}b_{ijkh}\omega_h,\quad b_{ijkh}\in\mathbf{Z}\ \ (1\leqslant h\leqslant n)$$

对于

$$1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant j\leqslant N,\ 1\leqslant k\leqslant n$$

成立. 由线性方程组理论，可以将 b_{ijkh} 用诸 a_{ij} 表示，因此，存在只与 ω_1，…，ω_n（因而只与 K）有关的常数 c_3，便得

$$|b_{ijkh}|<c_3\max\left|\overline{a_{ij}}\right|=c_3U,$$

其中$1\leqslant i\leqslant M$，$1\leqslant j\leqslant N$，$1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant h\leqslant n$.

由定理 1，存在不全为零的有理整数 $x_{jk}(1\leqslant j\leqslant N, 1\leqslant k\leqslant n)$，使得

$$\max_{j,k}|x_{jk}|<(c_3NU)^{\frac{N}{N-M}}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}b_{ijkh}x_{jk}=0,\ (1\leqslant h\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant M).$$

于是

$$0=\sum_{h=1}^{n}\omega_h\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}b_{ijkh}x_{jk}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}\sum_{h=1}^{n}b_{ijkh}\ \omega_h$$

$$=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\ \sum_{k=1}^{n}x_{jk}\ \omega_k.$$

由此可见，由

$$x_j=\sum_{k=1}^{n}x_{jk}\ \omega_k \qquad (1\leqslant j\leqslant N)$$

所定义的 x_1，…，x_N 是代数整数，而且满足条件（6）与（7）式.

证毕.

下面，要用到代数中的"嵌入"概念，对此不太熟悉的读者，可参阅有关教程，例如 B.L.Van der Waerden 的《*Algebra(I)*》（有中译本）或 S.Lang 的《*Algebra*》.

定理3. 设 $\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\alpha)$是代数数域，$d=[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$,$N$，$M\in\mathbf{N}$，$b_{ij}(1\leqslant i\leqslant N，1\leqslant j\leqslant M)$是 $\mathbf{K}$ 中的代数整数且不全为零．以 σ_1，…，σ_d 表示 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{C}$ 的嵌入.若$N\geqslant 2dM$,则方程组

$$\sum_{i=1}^{N}b_{ij}\ x_i=0 \qquad (1\leqslant j\leqslant M) \qquad (8)$$

有不全为零的有理整数解 x_1，…，x_N，使得

$$\max|x_i|\leqslant\sqrt{2}\ N\Big(\max_{1\leq j\leq M}\prod_{k=1}^{d}\Big(\max_{1\leq i\leq N}|\sigma_k(b_{ij})|\Big)\Big)^{\frac{1}{d}}. \qquad (9)$$

证明．以 σ_1，…，σ_r 表示 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{R}$ 的嵌入，以 σ_{r+i}，$\sigma_{r+s+i}(1\leqslant i\leqslant s)$表示其余的 s 对共轭的嵌入.于是$r+2s=d$，

记

$$\tau_i=\sigma_i, \quad (1\leqslant i\leqslant r),$$

$$\tau_{r+i}=Re\sigma_{r+i}, \quad \tau_{r+s+i}=Im\sigma_{r+i}, \quad (1\leqslant i\leqslant s),$$

其中 Rez 与 Imz 分别表示复数 z 的实部与虚部.

又记

$$A=[\sqrt{2}\,N\,(\max_{j}\prod_{k=1}^{d}\max_{i}|\sigma_k(b_{ij})|)^{\frac{1}{d}}],$$

其中$[x]$表示数 x 的整数部分. 由于 b_{ij} 都是代数整数且不全为零，所以显然 $A\geqslant1$.

对于任意固定的 k，j $(1\leqslant k\leqslant d, 1\leqslant j\leqslant M)$，记

$$y_{k,j}=\tau_k(\sum_{i=1}^{N}b_{ij}\;x_i), \qquad 0\leqslant x_i\leqslant A,$$

则对于每一组有理整数 x_1，…，x_N，有一组确定的 $\{y_{kj}\}$ 值与之对应，$(1\leqslant k\leqslant d,\ 1\leqslant j\leqslant M)$. 显然，这种$\{x_i\}$数组的个数是$(A+1)^N$个，而与之对应的每一个 y_{kj} 值，落在一个长度不超过

$$N\cdot A\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\tau_k(b_{ij})|$$

的区间中. 记

$$L=A(A+1),$$

由$N\geqslant2Md$ 可知

$$L^{Md}<(A+1)^{2Md}\leqslant(A+1)^N.$$

因此，由 Dirichlet 原则可知，至少有两组不同的 $x_1^{(i)}$，$x_2^{(i)}$，…，$x_N^{(i)}$ $(i=1,2)$，使得

$$|\tau_k(\sum_{i=1}^{N}b_{ij}\;x_i^{(1)})-\tau_k(\sum_{i=1}^{N}b_{ij}\;x_i^{(2)})|$$

$$\leqslant \max_i |\tau_k(b_{ij})| \frac{NA}{L}. \qquad (10)$$

令

$$x_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N),$$

则 $x_1, \cdots, x_N$ 不同时为零，且满足（9）式．下面，证明它们也满足（8）中的方程．

由（10）式，对于 $j=1,2,\cdots,M$，有

$$|\sigma_k(\sum_{i=1}^N b_{ij}x_i)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\sigma_k(b_{ij})| \frac{NA}{L}, \quad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

以及

$$|\sigma_k(\sum_{i=1}^N b_{ij}x_i)\sigma_{k+s}(\sum_{i=1}^N b_{ij}x_i)|$$

$$\leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant N}(R_e\sigma_k(b_{ij}))^2 + \max_i(I_m\sigma_k(b_{ij}))^2)\left(\frac{NA}{L}\right)^2$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant N} |\sigma_k(b_{ij})|^2 \left(\frac{NA}{L}\right)^2, \qquad r+1 \leqslant k \leqslant r+s,$$

因此，对 $j=1,2,\cdots,M$，有

$$|\prod_{k=1}^d \sigma_k(\sum_{i=1}^N b_{ij}x_i)| \leqslant \sqrt{2}^d \prod_{k=1}^d \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\sigma_k(b_{ij})|$$

$$\cdot\left(\frac{NA}{N}\right)^d < \left(\frac{A+1}{N}\right)^d \cdot \left(\frac{NA}{L}\right)^d$$

$$= \left(\frac{A(A+1)}{L}\right)^d = 1.$$

由于 $\sum_{i=1}^{N} b_{ij}x_i$ 是代数整数，若它不为零，则上式左端应该大于或等于1．这样必有

$$\sum_{i=1}^{N} b_{ij}x_i = 0$$

对于 $j=1,2,\cdots,M$ 成立，此即（8）式中的方程．

证毕．

用同样的方法，可以证明下面的定理．

定理4. 设K是代数数域，$d=[\mathrm{K}:\mathrm{Q}]$，又设 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant j\leqslant M)$ 是K中的一组不全为零的代数整数，

$$\max_{i,j}\overline{|a_{ij}|}\leqslant A.$$

若 $N>dM$，则存在不全为零的有理整数 $x_1,\cdots,x_N$，使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i|\leqslant(\sqrt{2}NA)^{\frac{dM}{N-dM}},$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_i = 0,\quad (1\leqslant j\leqslant M).$$

证明．（略）

第三节 Mahler测度

定义4. 对于多项式

$$P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,\quad c_i\in\mathrm{C}(0\leqslant i\leqslant n),$$

称

$$M(P)=\exp\left(\int_0^1\log|P(e^{2\pi it})|dt\right)$$

为 $P(x)$的Mahler测度，若 $P(x)=0$,则规定 $M(0)=0$.

若 α 是代数数，$P(x)$是它的最小多项式，则规定

$$M(\alpha)=M(P)$$

是α的 Mahler 测度.

由上述定义，容易得到Mahler 测度的一些简单性质.

性质Ⅰ. 若 $P(x)\neq 0$，则 $M(P)>0$.

性质Ⅱ. 对于多项式 $P_1(x)$与 $P_2(x)$，有

$$M(P_1P_2)=M(P_1)\cdot M(P_2).$$

这两个性质的证明略去.

性质Ⅲ. 若

$$P(x)=c_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_n),$$

则

$$M(P)=|c_0|\cdot\prod_{i=1}^{n}\max(1,|\xi_i|).$$

证明. 不妨假定

$$0<|\xi_1|\leqslant|\xi_2|\leqslant\cdots\leqslant|\xi_N|\leqslant 1<|\xi_{N+1}|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant|\xi_n|. \quad (12)$$

由Jesen 公式得到

$$\int_0^1\log|P(e^{2\pi it})|dt=\log|P(0)|+\prod_{\nu=1}^{N}\log\frac{1}{|\xi_\nu|}$$
$$=\log|c_0\xi_{N+1}\cdots\xi_n)|=\log(|c_0|$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{n}\max(1,|\xi_i|)), \quad (13)$$

由此即可得证.

证毕.

由性质Ⅲ立即推出下面的结论.

推论. 若 α 是 d 次代数数，则

$$M(\alpha)=|a_0|\cdot\prod_{i=1}^{d}\max(1,|\alpha_i|),$$

其中 a_0 是 α 的最小多项式的首项系数，$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$ 是 α 的最小多项式的全部零点.

引理5. 设复系数多项式

$$P(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$$

的根为 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，满足（12）式，则对于任意的

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n,$$

有

$$|c_0\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}|\leqslant M(P), \qquad (14)$$

以及

$$M(P)\leqslant|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_n|, \qquad (15)$$

$$|c_i|\leqslant C_n^iM(P). \qquad (16)$$

证明. 由于

$$|P(e^{2\pi it})|\leqslant|c_0|+\cdots+|c_n|,$$

所以（15）式是显然的.

由（13）与（12）式得到

$$|c_0\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}|\leqslant|c_0\xi_{N+1}\cdots\xi_n|=M(P),$$

此即（14）式.

由多项式的系数与零点的关系，并利用（14）式可得（16）式.

证毕.

定理5. 设 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_k(x)$ 分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 次多项式，$P(x)=\prod_{i=1}^{k}P_i(x)$，$n=n_1+\cdots+n_k$. 则

$$\prod_{i=1}^{k} L(P_i) \leqslant 2^n L(P),$$

$$\prod_{i=1}^{k} H(P_i) \leqslant e^n H(P).$$

证明．对于任意的多项式 $g(x)=b_0x^r+\cdots+b_r$，利用（16）式及明显的不等式 $c_n^i \leqslant 2^{n-1}$ $(0\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1)$，得到

$$\log(|b_0|+\cdots+|b_r|)\leqslant \log 2^r + \int_0^1 \log|g(e^{2\pi i\theta})|d\theta, \qquad (17)$$

$$\log H(g)\leqslant \log 2^{r-1} + \int_0^1 \log|g(e^{2\pi i\theta})|d\theta. \qquad (18)$$

不妨设 $k\geqslant 2$，$n\geqslant 2$.

由（17）式得到

$$\sum_{i=1}^{k} \log L(P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \log 2^{n_i} + \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \log|P_i(e^{2\pi i\theta})|d\theta,$$

$$\prod_{i=1}^{k} L(P_i) \leqslant 2^n e^{\int_0^1 \log|P(e^{2\pi i\theta})|d\theta} \leqslant 2^n M(P) \leqslant 2^n L(P).$$

由（18）式得到

$$\sum_{i=1}^{k} \log H(P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \log 2^{n_i-1}$$

$$+\int_0^1 \sum_{i=1}^k \log|P_i(e^{2\pi i\theta})|d\theta,$$

$$\prod_{i=1}^k H(P_i)\leqslant 2^{n-2}L(P)\leqslant(n+1)2^{n-2}H(P)$$

$$\leqslant e^n H(P).$$

证毕.

第三章 Liouville 定理

Liouville 在1844年指出，代数数不能用有理数"很好地"逼近，这是一个很有价值的工作，因为它首次具体地指明了超越数的存在.

此后，Cantor 引进"可数性"概念，从而得出"几乎所有复数是超越数"的结论．我们知道，Liouville 数所构成的集合测度为零，因此，Cantor结论是十分重要的．

本章将叙述 Liouville定理及其推广形式.

第一节 Liouville 定理

定义1．凡非代数数，称为超越数。

定理1．超越数是存在的.

证明．全体代数数构成的集合 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} E_{n,h},$$

其中 $E_{n,h}$ 表示所有次数为 n、高为 h 的不可化整系数多项式的零点所构成的集合．显然 $E_{n,h}$ 是一个有限集合，所以 $\mathbf{A}$是一个可数集合.

另一方面，全体复数的集合是不可数集合，所以全体超越数的集合必是不可数的，而且对于空间 R^2 中的任一可测集E，以E_0表示E中的全体超越数所组成的集合，则

$$mE_q = mE,$$

此处 mE 表示集 E 的Lebesgue测度．

定理2 （Liouville）．设 α 是 d 次代数数，则存在常数 $c = c(\alpha) > 0$，使得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > c \cdot \frac{1}{q^d}$$

对于任何整数对 p，q（$q > 0$）成立．

证明．设 α 的最小多项式是 $P(x)$．显然，不妨假定 α 是实数，而且 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1$．

由 $P(\alpha) = 0$ 及微分学中值定理，得到

$$-P\left(\frac{p}{q}\right) = P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)P'(\xi),$$

其中 ξ 是介于 α 与 $\frac{p}{q}$ 之间的数，因而

$$|\xi - \alpha| \leqslant 1, \quad |\xi| \leqslant |\alpha| + 1.$$

以 M 表示 $|P'(x)|$ 在区间 $[-|\alpha| - 1, |\alpha| + 1]$ 中的最大值，那么，由上面的论述可以推出

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot M \geqslant \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^d},$$

其中 d 是 $P(x)$ 的次数．这就是所需要的结论．

证毕．

由定理 2 立即得到下面的推论．

推论．设 α 是实数．若存在 $\{\omega_n\} \subset \mathbf{R}$，$\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \subset Q$，$\omega_n \to$

$+\infty, q_n \geqslant 2 (n \geqslant 1)$，使得

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n^{w_n}} \qquad (2)$$

对于 $n \geqslant 1$ 成立，则 α 必是超越数．

具有性质（2）的数，称为 Liouville 数，例如

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

就是 Liouville 数．事实上，令

$$p_n = 2^{n!} \sum_{r=1}^{n} 2^{-r!} \qquad q_n = 2^{n!} \quad (n \geqslant 1),$$

则

$$0 < \xi - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=n+1}^{\infty} 2^{-r!} < 2^{-(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

$$= 2 \cdot 2^{-(n+1)!} < \frac{1}{q_n^n}.$$

由上述证明过程容易看出，对于任意自然数 $\lambda > 1$，

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n!}$$

是超越数．

Liouville 定理的结果被以后的许多数学家做了改进．1955年 Roth 证明了不等式（1）右方 q^{-1} 的幂次 d 可以改为与 α 无关的任意大于 2 的常数．即对于任意固定的 $\kappa > 2$，如果 α 是代数无理数，那么不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\kappa}$$

只能有有限多个有理数解$\frac{p}{q}$($q>0$,$(q,p)=1$).

注意，若 $\kappa\leqslant 2$，那么上述结论不成立．事实上，由连分数理论知道，对于任意的无理数 α（不论是否代数数），不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2},\quad q>0,\quad (p,q)=1$$

总有无穷多组解(p,q).

另一方面,无论 Roth 定理还是 Liouville 定理中的条件，都仅是判定超越数的充分条件，而非必要条件.事实上，使用 Lebesgue 测度,则几乎所有的超越数不是 Liouville 数，也无法用定理 1 判定.

第二节　Liouville定理的推广

定理 2 可视为一次式

$$P(x)=qx+p$$

在点 $x=\alpha$ 的值的下界估计．下面给出它的几个推广．

定理3．设 α 是 n 次代数数，又设

$$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

是有理整系数多项式并且

$$L(g)=|b_0|+\cdots+|b_m|,$$

则当 $g(\alpha)\neq 0$时，必有

$$|g(\alpha)|\geqslant\frac{\max(1,|\alpha|)^m}{(L(\alpha))^m(L(g))^{n-1}},$$

其中

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{当}\alpha \notin \mathbf{R}; \\ 1, & \text{当}\alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

证明：设α的最小多项式是

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[x],$$

则

$$L(\alpha) = |a_0| + \cdots + |a_n|.$$

由于$f(x)$是不可化多项式，所以若$g(x) \neq 0$则多项式$g(x)$与$f(x)$没有非常数的公因子，因此，对于$f(x)$的零点$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，有

$$g(\alpha_i) \neq 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

所以，$f(x)$与$g(x)$的结式$R = Res(f, g) \neq 0$，$|R| \geqslant 1$.

另一方面，由结式的定义可知：

$$R = a_n^m g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_n),$$

于是

$$|a_n^m g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_n)| \geqslant 1, \tag{3}$$

其中

$$|g(\alpha_i)| = |b_m \alpha_i^m + \cdots + b_0| \leqslant L(g) \max(1, |\alpha_i|)^m. \tag{4}$$

下面分两种情形讨论：

（1）. $\alpha \in \mathbf{R}$. 此时，由（3）式与(4)式得到

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant |a_n|^m \cdot |g(\alpha)| \cdot (L(g))^{n-1} \prod_{i=2}^{n} \max(1, |\alpha_i|)^m \\ &= |g(\alpha)| \cdot (L(g))^{n-1} \max(1, |\alpha_1|)^{-m} \\ &\quad \cdot (|a_n| \cdot \prod_{i=1}^{n} \max(1, |\alpha_i|))^m. \end{aligned} \tag{5}$$

由第二章引理5，得到

$$|g(\alpha)|\cdot(L(g))^{n-1}\cdot\max(1,|\alpha|)^{-m}(L(\alpha))^{m}\geqslant 1,$$

此即当 $\omega=1$ 时的结论。

（2）．$\alpha\notin\mathbf{R}$．设 $\alpha=\lambda+i\mu$，则 $\bar{\alpha}=\lambda-i\mu$ 也是 $f(x)$ 的零点，设为 α_2，此时代替（5）式我们得到

$$1\leqslant|a_n|^{m}\cdot|g(\alpha)|\cdot|g(\bar{\alpha})|\cdot(L(g))^{n-2}$$

$$\cdot\prod_{i=3}^{n}\max(1,|\alpha_i|)^{m}=|g(\alpha)|^{2}\cdot(L(g))^{n-2}$$

$$\cdot\max(1,|\alpha|)^{-2m}\Big(|a_n|\prod_{i=1}^{n}\max(1,|\alpha_i|)\Big)^{m}.$$

由此及第二章引理5即可得到当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时的结论。

证毕。

注．由定理3的证明可见，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是任意复系数多项式，α 是 $f(x)$ 的零点，则

$$|g(\alpha)|\geqslant\frac{\max(1,|\alpha|)^{m}}{(L(f))^{m\omega}(L(g))^{n\omega-1}}|Res(f,g)|^{\omega},$$

其中 $Res(f,g)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式，$\omega=1$．如果 $g(x)\in\mathbf{R}[x]$，则当 $\alpha\notin\mathbf{R}$ 时，可取 $\omega=\frac{1}{2}$。

做为定理3的一个应用，下面证明一个关于缺项级数所定义的函数值的定理。

设

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

在 $|z|<R(>0)$ 中收敛，若有自然数列 $\{r_n\}$ 与 $\{s_n\}$，使得

$$r_n\to\infty,\quad s_n\to\infty,\quad \lim\frac{s_n}{r_n}=\infty,$$

$$0=s_0\leqslant r_1<s_1\leqslant r_2<s_2\leqslant\cdots\cdots,$$

而且

$$a_k=0,\quad (r_n<k<s_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots),$$

$$a_{r_n}\neq 0,\quad a_{s_n}\neq 0,\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots),$$

则称 $f(z)=\sum a_k z^k$ 是缺项级数．若令

$$P_n(z)=\sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} a_k z^k,$$

则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z).$$

以下将使用这一记法．

定理4．设

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty} P_n(z)$$

是缺项级数，收敛半径为１，又设 $a_k(k\geqslant 0)$ 是有理整数．那么，对于任何代数数 $\alpha(|\alpha|<1)$，$f(\alpha)$ 为代数数的充分必要条件是：存在只与 α 有关的数 $N=N(\alpha)$，使得

$$P_n(\alpha)=0\quad (n\geqslant N).$$

证明．充分性是显然的，下证必要性．

证 α 是 M 次代数数，其最小多项式为 $A(x)$，而且

$$\beta=f(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\alpha^k=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha),$$

其中 β 是 d 次代数数，它的最小多项式的全部零点为 $\beta=\beta_1$，β_2，…，β_d，并且记它的分母为 $m=m(\beta)$．

下面，以 c_1，c_2，…表示仅与 α，β 有关的常数．

由于 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 的收敛半径为1，$|\alpha|<1$，

所以必有常数 $c_1(>1)$，c_2，使得

$$|c_1\alpha|<1,$$

$$|a_k|\leqslant c_2\cdot c_1^k \quad (k\geqslant 0).$$

令

$$p_{ni}(z)=-\beta_i+\sum_{k=0}^{r_n}a_kz^k, \quad (i=1,2,\cdots,d),$$

$$p_n(z)=m^d\prod_{i=1}^{d}p_{ni}(z),$$

则 $p_n(z)$ 是 r_nd 次有理整系数多项式，而且

$$L(p_n)\leqslant m^d\prod_{i=1}^{d}L(p_{ni})\leqslant m^d\prod_{i=1}^{d}(|\beta_i|+\sum_{k=0}^{r_n}|a_k|)$$

$$\leqslant m^d(c_3\cdot c_1^{r_n})^d\leqslant c_4\cdot c_1^{r_nd}.$$

由此并利用定理3得到，若 $p_n(\alpha)\neq 0$，则必

$$|p_n(\alpha)|\geqslant(L(p_n))^{M-1}L(A)^{r_nd})^{-1}.$$

$$\geqslant((c_4c_1^{r_nd})^{M-1}L(A)^{r_nd})^{-1}\geqslant c_5^{-r_nd}. \quad (6)$$

另一方面，由

$$|p_{n1}(\alpha)|=|\sum_{k=s_n}^{\infty}a_k\alpha^k|\leqslant|c_1\alpha|^{s_n}\cdot c_6,$$

$$|p_{ni}(\alpha)|=|-\beta_i+\sum_{k=0}^{r_n}a_k\alpha^k|\leqslant c_7$$

得出

$$|p_n(\alpha)|\leqslant m^d\cdot c_6|c_1\alpha|^{S_n}\cdot c_7^{d-1}\leqslant e^{-c_0 S_n}(c_0>0).$$

当 n 充分大时，上式与（6）式矛盾．所以，对充分大的 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时必有

$$p_n(\alpha)=0.$$

因此对于每个 $n\geqslant n_0$，有一个 $\lambda_n(1\leqslant\lambda_n\leqslant d)$，使得

$$\sum_{k=0}^{r_n} a_k\alpha^k=\beta_{\lambda_n}.$$

于是

$$P_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{r_{n+1}} a_k\alpha^k-\sum_{k=0}^{r_n} a_k\alpha_k=\beta_{\lambda_{n+1}}-\beta_{\lambda_n},\quad n\geqslant n_0. \tag{7}$$

以 δ 表示诸 $\beta_1,\cdots,\beta_d$ 之间的最小距离，那么上式推出，如果不存在 $n_1\geqslant n_0$ 使得 $\lambda_{n+1}=\lambda_n(n\geqslant n_1)$，则

$$|P_n(\alpha)|>\frac{1}{2}\delta,(n\geqslant n_0)$$

但由于 $f(\alpha)$ 收敛，故

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\alpha)=0.$$

因此必存在 $n_1\geqslant n_0$，使得

$$P_n(\alpha)=0.\quad(n\geqslant n_1)$$

证毕．

定理5．设代数数 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的次数与高分别为 d_i 与 h_i，$\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是 d 次代数数域，又设

$$P(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n}p(i_1,\cdots,i_n)x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

是有理整系数多项式且

$$\max_{i_1\cdots i_n}|p(i_1,\cdots,i_n)|\leqslant B(>0),$$

则当$P(\alpha_1\cdots,\alpha_n)\neq 0$时，有

$$|P(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|\geqslant\left(B\prod_{i=1}^{n}(N_i+1)\right)^{-d+1}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}((d_i+1)h_i)^{-\frac{N_id}{d_i}}.$$

证明．设

$$\alpha_i=\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ \cdots,\alpha_{id}$$

是α_i在K上的共轭数，则$P(\alpha_1\cdots,\alpha_n)$在K上的范数

$$M=\prod_{j=1}^{d}P(\alpha_{1j},\ \cdots,\alpha_{nj})$$

$$=\prod_{j=1}^{d}\left(\sum_{i_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n}p(i_1,\ \cdots,i_n)\alpha_{1j}^{i_1}\cdots\alpha_{nj}^{i_n}\right)$$

（8）

是有理数．由第一章定理16知道，$\alpha_{i1},\cdots\alpha_{id}$由$\frac{d}{d_i}$组$\alpha_i$的共轭数构成，因此，$\alpha_i$的每一个共轭数在（8）中的幂次数不超过$N_i\cdot\frac{d}{d_i}$，从而若以$a_i$表示$\alpha_i$的最小多项式的首项系数，则由第一章定理10可知

$$M\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{d}{d_i}N_i}$$

是代数整数，因而必是有理整数．这样，如果$P(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$，则必有（不妨设$a_i>0$）

$$\left|M\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{d}{d_i}N_i}\right|\geqslant 1,$$

$$|M| \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{-\frac{d}{d_i} N_i}. \tag{9}$$

另一方面，对于 $j=1,2,\cdots,d$，有

$$|\mathrm{P}(\alpha_{1j},\cdots,\alpha_{nj})| \leqslant B \prod_{i=1}^{n} (N_i+1) \cdot \max(1, |\alpha_{ij}|)^{N_i},$$

以及

$$\prod_{j=2}^{d} |\mathrm{P}(\alpha_{1j},\cdots,\alpha_{nj})| \leqslant \left(B \prod_{i=1}^{n} (N_i+1)\right)^{d-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} \max(1,|\alpha_{ij}|)^{N_i}. \tag{10}$$

对每一个 i，将 α_{i1}，$\cdots$，α_{id} 分成 $\frac{d}{d_i}$ 组，并利用第二章引理5，得到

$$\prod_{j=1}^{d} \max(1,|\alpha_{ij}|)^{N_i} \leqslant \left(\frac{1}{a_i}(d_i+1)h_i\right)^{\frac{d}{d_i}N_i}.$$

代入（10）式，推出

$$\prod_{j=2}^{d} |\mathrm{P}(\alpha_{1j},\cdots,\alpha_{nj})| \leqslant \left(B \prod_{i=1}^{n} (N_i+1)\right)^{d-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{a_i}(d_i+1)\right)^{\frac{d}{d_i}N_i}.$$

由此及（8）式，（9）式可推出，当 $\mathrm{P}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \neq 0$ 时则有

$$|\mathrm{P}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)| = M \left| \prod_{j=2}^{d} \mathrm{P}(\alpha_{1j},\cdots,\alpha_{nj}) \right|^{-1}$$

$$\geqslant\Big(B\prod_{i=1}^{m}(N_i+1)\Big)^{-d+1}\prod_{i=1}^{m}\Big(h_i(d_i+1)\Big)^{-\frac{d}{d_i}N_i}.$$

证毕．

利用定理5可给出Siegel引理的一个更为一般的推广．为此需要证明一个引理．

引理1． 设有 $x_1,\cdots,x_s$ 的 r 个线性形式

$$l_\lambda=\sum_{\mu=1}^{s}a_{\lambda\mu}x_\lambda\qquad(1\leqslant\lambda\leqslant r),$$

其中 $s>2r$，$a_{\lambda\mu}\in\mathbf{C}$，而且存在常数$M$，使得

$$|a_{\lambda\mu}|\leqslant M,\quad(1\leqslant\lambda\leqslant r,\ 1\leqslant\mu\leqslant s),$$

则对任意的自然数C，存在不全为零的有理整数$y_1,\cdots,y_s$，使得

$$|y_\mu|\leqslant C\quad(1\leqslant\mu\leqslant s),\tag{11}$$

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{s}a_{\lambda\mu}y_\mu\Big|\leqslant\sqrt{2}\,sMC^{1-\frac{s}{2r}}.\quad(1\leqslant\lambda\leqslant r)\tag{12}$$

证明．(i)．假定所有的 $a_{\lambda\mu}(1\leqslant\lambda\leqslant r,\ 1\leqslant\mu\leqslant s)$ 都是实数，则对于每一个整数组

$$(x_1,\cdots,x_s),\qquad 0\leqslant x_\mu\leqslant C\quad(1\leqslant\mu\leqslant s),$$

都有一个确定的 l_λ 值与之对应，而且

$$C\sum_{\mu=1}^{s}\min(0,a_{\lambda\mu})\leqslant l_\lambda\leqslant C\sum_{\mu=1}^{s}\max(0,a_{\lambda\mu}),$$

即 l_λ 在一个长度不超过 CsM 的区间内．取自然数 n，使得

$$(C+1)^{\frac{s}{r}}-1\leqslant n<(C+1)^{\frac{s}{r}},$$

则由 $n^r<(C+1)^s$及Dirichlet原则可知，至少有两组不相

同的$(x_1^{(i)},\cdots,x_s^{(i)})$ $(i=1,2)$，与它们对应的$l^{(i)}$值满足不等式

$$|l_\lambda^{(1)}-l_\lambda^{(2)}|\leqslant\frac{sMC}{n}\leqslant sMC((c+1)^{\frac{s}{r}}-1)^{-1}$$

$$\leqslant sMC^{1-\frac{s}{r}}$$

对于 $1\leqslant\lambda\leqslant r$ 成立。令

$$y_\mu=x_\mu^{(1)}-x_\mu^{(2)},\quad(1\leqslant\mu\leqslant s),$$

则$y_1,\cdots y_s$满足（11）与（12）式.

(ii). 假定诸$a_{\lambda\mu}$不全为实数. 此时以$p_{\lambda\mu}$与$q_{\lambda\mu}$分别表示$a_{\lambda\mu}$的实数部分和虚数部分，则

$$|p_{\lambda\mu}|\leqslant M,\ |q_{\lambda\mu}|\leqslant M,\ (1\leqslant\lambda\leqslant r, 1\leqslant\mu\leqslant s),$$

从而利用（i）可知存在不全为零的有理整数$y_1,\cdots,y_s$, $|y_\mu|\leqslant C$ $(1\leqslant\mu\leqslant s)$，使得

$$|\sum_{\mu=1}^{s}p_{\lambda\mu}y_\mu|\leqslant sMC^{1-\frac{s}{2r}},\qquad(1\leqslant\lambda\leqslant r),$$

$$|\sum_{\mu=1}^{s}q_{\lambda\mu}y_\mu|\leqslant sMC^{1-\frac{s}{2r}},\qquad(1\leqslant\lambda\leqslant r),$$

从而

$$|\sum_{\mu=1}^{s}a_{\lambda\mu}y_\mu|=|\sum_{\mu=1}^{s}p_{\lambda\mu}y_\mu+i\sum_{\mu=1}^{s}q_{\lambda\mu}y_\mu|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,sMC^{1-\frac{s}{2r}},$$

证毕.

定理6. 设

$$P_{\lambda\mu}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{N_n} p_{\lambda\mu}(i_1, \cdots, i_n)$$

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant r, 1 \leqslant \mu \leqslant s)$$

是有理整系数多项式，且

$$|p_{\lambda\mu}(i_1, \cdots, i_n)| \leqslant B, (1 \leqslant \lambda \leqslant r, 1 \leqslant \mu \leqslant s,$$
$$0 \leqslant i_j \leqslant N_j, 1 \leqslant j \leqslant n).$$

又设 α_i 是次数为 d_i，高为 h_i 的代数数（$1 \leqslant i \leqslant n$），$K = Q(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$，$d = [K:Q]$. 则当 $s > 2rd$ 时，存在不全为零的有理整数 $y_1, \cdots, y_s$，使得

$$\sum_{\mu=1}^{s} y_\mu p_{\lambda\mu}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0, \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant r),$$

而且

$$|y_\mu| \leqslant C, \quad (1 \leqslant \mu \leqslant s),$$

其中 C 满足不等式

$$C^{\frac{s}{2r}-d} > \sqrt{2}\left(Bs\prod_{i=1}^{n}(N_i+1)\right)^d \prod_{i=1}^{n}\Big((h_i+1)^{N_i}$$
$$\cdot (h_i(d_i+1))^{\frac{d}{d_i}N_i}\Big). \qquad (13)$$

证明. 由 $|\alpha_i| < h_i + 1$ 得到

$$|P_{\lambda\mu}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)| < \prod_{i=1}^{n}(N_i+1) B \cdot \prod_{i=1}^{n}(h_i+1)^{N_i}.$$

令

$$l_\lambda(x_1,\cdots,x_s)=\sum_{\mu=1}^{s}x_\mu P_{\lambda\mu}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$

则由引理 1 可知，存在不全为零的有理整数$y_1,\cdots,y_s$，其绝对值不超过C，而且

$$|l_\lambda(y_1,\cdots,y_s)|<\sqrt{2}\,s\prod_{i=1}^{n}(N_i+1)\cdot B$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}(h_i+1)^{N_i}C^{1-\frac{s}{2r}},\quad(1\leqslant\lambda\leqslant r).$$

由上式及（13）式可推出

$$|l_\lambda(y_1,\cdots,y_n)|<(BsC\prod_{i=1}^{n}(N_i+1))^{-d+1}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}((h_i(d_i+1))^{-\frac{d}{d_i}N_i}.\qquad(14)$$

另一方面，$l_\lambda(y_1,\cdots,y_s)$是关于$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的有理整系数多项式，它关于$\alpha_i$的次数不超过$N_i$，而且系数的绝对值不超过$BsC$，那么比较（14）式与定理5的结论即可得到

$$l_\lambda(y_1,\cdots,y_s)=0,\quad(1\leqslant\lambda\leqslant r).$$

证毕。

第三节　代数数用代数数的逼近

现在考察 Liouville 定理的另一类形式的推广，即用代数数对代数数的逼近。为此首先研究关于对称函数的几个等式。

引理2. 对于任意的整数 $m\geqslant0$，以$\sigma_m(x_1,\cdots,x_p)$表示关于$x_1,\cdots,x_p$的m阶初等对称函数，则

$$\sigma_m(x_{n+2},\cdots,x_p)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}x_{n+1}^{m-i}$$

$$\cdot\sigma_i(x_{n+1},\cdots,x_p), \qquad (15)$$

$$\sigma_m(x_{n+2},\cdots,x_p)=\sum_{i=m+1}^{p-n}(-1)^{m+1+i}\,x_{n+1}^{m-i}$$

$$\cdot\sigma_i(x_{n+1},\cdots,x_p). \qquad (16)$$

证明．由

$$\sigma_{m+1}(x_{n+2},\cdots,x_p)=\sigma_{m+1}(x_{n+1},\cdots,x_p)$$
$$-x_{n+1}\sigma_m(x_{n+2},\cdots,x_p) \qquad (17)$$

及数学归纳法，即可得到（15）式．

又由

$$(x_{n+1}-x_{n+1})(x_{n+1}-x_{n+2})\cdots(x_{n+1}-x_p)=0$$

得到

$$\sum_{i=0}^{p-n}(-1)^i x_{n+1}^{p-n-i}\sigma_i(x_{n+1},\cdots,x_p)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{p-n}(-1)^{i+1}x_{n+1}^{-i}\,\sigma_i(x_{n+1},\cdots,x_p)=0,$$

$$\sigma_0(x_{n+2},\cdots,x_p)=1=\sum_{i=1}^{p-n}(-1)^{i+1}x_{n+1}^{-i}$$

$$\cdot\sigma_i(x_{n+1},\cdots,x_p),$$

上式即是$m=0$时的（16）式．由此利用（17）式及归纳法可得（16）式．

证毕．

引理3．设

$$P(x)=a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_p)=a_0x^p+\cdots+a_p\in\mathbf{C}[x],$$

则对于任意的$m=0,1,\cdots,p-1$,有下面的不等式:

(i). $|a_0\sigma_m(\alpha_2,\cdots,\alpha_p)|\leqslant L(p)\max(1,|\alpha_1|)^{-1}$;

(ii). $|a_0\sigma_m(\alpha_3,\cdots,\alpha_p)|\leqslant\begin{cases}(m+1)L(P)\max(1,|\alpha_1|)^{-1}, 当|\alpha_2|\leqslant 1,\\ (p-m-1)L(P)\max(1,|\alpha_1|)^{-1}\cdot|\alpha_2|^{-1}, 当|\alpha_2|>1;\end{cases}$

(iii). 若$|\alpha_i|(1\leqslant i\leqslant 3)$中至多有一个大于1,则

$$|a_0\sigma_m(\alpha_4,\cdots,\alpha_p)|\leqslant\frac{(m+2)(m+1)L(P)}{2\prod_{i=1}^{3}\max(1,|\alpha_i|)},$$

否则

$$|a_0\sigma_m(\alpha_4,\cdots,\alpha_p)|\leqslant\frac{(p-m-1)(p-m-2)L(P)}{2\prod_{i=1}^{3}\max(1,|\alpha_i|)}.$$

证明. (i). 当$|\alpha_1|\leqslant 1(>1)$时,由(15)((16))式及

$$\sigma_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)=(-1)^i\frac{a_{p-i}}{a_0}$$

得证.

由(i)及(15)、(16)式,可得结论(ii).

若$|\alpha_i|(1\leqslant i\leqslant 3)$中至多有一个大于1,不妨设$|\alpha_2|\leqslant 1$,$|\alpha_3|\leqslant 1$,则由(15)式($n=2$)及结论(ii)可得结论(iii)的第一个不等式. 否则,由结论(ii)及(16)式可得(iii)的另一个不等式.

证毕.

引理4. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$是$P(x)=a_0x^p+\cdots+a_p$的零点,则对于任意的复数β及$n=0,1,2,3(p\geqslant n)$,有

$|a_0(\beta-\alpha_{n+1})\cdots(\beta-\alpha_p)|$

$$\leqslant C_p^n L(P)\max(1,|\beta|)^{p-n}\prod_{j=1}^{n}\max(1,|\alpha_j|)^{-1}.$$

证明．令 $P_n(x)=a_0(x-\alpha_{n+1})\cdots(x-\alpha_p)$ $(n=0,1,2,3)$，则

$$|P_n(\beta)|\leqslant L(P_n)\max(1,|\beta|)^{p-n}.$$

由此及引理3，并利用不等式

$$L(P_n)\leqslant|a_0|\cdot\sum_{m=0}^{p-n}|\sigma_m(\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_p)|$$

即可得证．

证毕．

定理7．设 α 与 β 分别是 m 与 n 次代数数，$P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别是它们的最小多项式，而且 $P(\beta)\neq 0$，$Q(\alpha)\neq 0$，则

$$|\alpha-\beta|\geqslant\frac{\max(1,|\alpha|)\max(1,|\beta|)}{\min(m,n)(L(P))^{\omega n}(L(Q))^{\omega m}},$$

其中 $\omega=1$．若 α，β 中有一个不是实数，则可取 $\omega=\frac{1}{2}$．

证明．设

$$P(x)=a_0(x-\alpha)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m),$$

则

$$P(\beta)=(\beta-\alpha)\cdot a_0(\beta-\alpha_2)\cdots(\beta-\alpha_m). \tag{18}$$

由定理3，

$$|P(\beta)|\geqslant\frac{\max(1,|\beta|)^m}{(L(Q))^m(L(P))^{n-1}}. \tag{19}$$

而由引理4（$n=1$），可得

$$|a_0(\beta-\alpha_2)\cdots(\beta-\alpha_m)|\leqslant mL(P)\max(1,|\beta|)^{m-1}\max(1,|\alpha|)^{-1},$$

由以上三式得到

$$|\beta-\alpha|\geqslant\frac{\max(1,|\alpha|)\max(1,|\beta|)}{m(L(Q))^m(L(P))^n}.$$

如果从考察 $Q(x)$出发，则可得到相应 的不等 式，于是得到 $\omega=1$时的结论.

现在，设 α 与 β 中至少有一个不是实数.

设 $\beta\notin\mathbf{R}$.由定理3,

$$|P(\beta)|\geqslant\frac{\max(1,|\beta|)^m}{(L(Q))^{\frac{1}{2}m}(L(P))^{\frac{1}{2}n-1}}. \tag{20}$$

由此及引理 4 ($n=1$)以及(18)式，推出

$$|\beta-\alpha|\geqslant\frac{\max(1,|\alpha|)\max(1,|\beta|)}{m(L(P))^{\frac{1}{2}n}(L(Q))^{\frac{1}{2}m}}. \tag{21}$$

若 $\beta\in\mathbf{R}$，则 $\alpha\notin\mathbf{R}$，此时 $P(\bar{\alpha})=0$.不妨设$\alpha_2=\bar{\alpha}$，于是

$$P(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\bar{\alpha})\cdot a_0(\beta-\alpha_3)\cdots(\beta-\alpha_m). \tag{22}$$

由引理 4 ($n=2$)，可知

$$|a_0(\beta-\alpha_3)\cdots(\beta-\alpha_m)|\leqslant C_m^2L(P)\max(1,|\beta|^{m-2})$$
$$\max(1,|\alpha|)^{-2}.$$

由此及(19)式与(22)式，仍可得到(21)式.

如果改为考察 $Q(x)$,则可得到与(21)式相应的不等式，于是得到 $\omega=\frac{1}{2}$时的结论.

证毕.

注1. 利用 关于 定理3的注，用上面的方法可以 证 明：设 $P(x)$与 $Q(x)$分别是m,n 次复 系 数 多 项式，$P(\alpha)=0$，$Q(\beta)=0$，则

$$|\alpha-\beta| \geqslant \frac{|Res(P,Q)|^{\omega}\max(1,|\alpha|)\max(1,|\beta|)}{\min(m,n)(L(P))^{\omega n}(L(Q))^{\omega m}},$$

其中 $\omega=1$. 但若 $P(x)\in\mathbf{R}[x]$, $Q(x)\in\mathbf{R}[x]$且 α 与 β 中至少有一个不是实数，则可取 $\omega=\frac{1}{2}$.

注2. 关于代数数用代数数的逼近，又有下面的定理.

定理8. 设 α 是次数 $>n$ 的代数数，$n\in\mathbf{N}$, $\epsilon>0$, 则只有有限多个次数不超过 n 的代数数 β，使得

$$|\alpha-\beta| < \frac{1}{(H(\beta))^{n+1+\epsilon}}.$$

第四章 Lindemann-Weierstrass 定理

在本章中，主要研究线性形式

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(z)e^{w_k z},$$

即所谓渐近式，Hermite 首先研究了这一线性形式．他的研究被进一步加深并用于超越数的研究，得到一系列很好的结果．

作为Hermite 方法的应用，我们证明了 e 与π的超越性，并且证明了Lindemann—Weierstrass 定理，此外还研究了数 e 用有理数逼近的程度．

第一节 数 e 的有理逼近

在数学分析中已经证明：

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

是无理数，下面考察数 e 用有理数逼近所能达到的精确度．

考虑二元函数

$$F(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{-k-1}\frac{d^k}{dy^k}\left(\frac{y^m(y-1)^n}{m!n!}\right),$$

容易算出

$$F(x,0)=\sum_{k=m}^{m+n}x^{-k-1}C_k^m\frac{(-1)^{m+n-k}}{(m+n-k)!},$$

$$F(x,1)=\sum_{k=n}^{m+n}x^{-k-1}C_k^n\frac{1}{(m+n-k)!}.$$

令

$$P(x)=(m+n)!\,x^{m+n+1}F(x,0)=$$

$$=\sum_{k=m}^{m+n}k!(-1)^{m+n-k}C_k^m\,C_{m+n}^k x^{m+n-k},\qquad (1)$$

$$Q(x)=(m+n)!\,x^{m+n+1}F(x,1)=$$

$$\sum_{k=n}^{m+n}k!\,C_k^nC_{m+n}^k x^{m+n-k},\qquad (2)$$

则 $P(x)$与$Q(x)$ 都是整系数多项式，而且它们的系数可以分别被$m!$与$n!$ 整除.

由分部积分容易得到

$$\int_0^1\frac{y^m(y-1)^n}{m!n!}e^{-xy}dy=F(x,0)-F(x,1)e^{-x}.$$

因此，若令

$$R(x)=(m+n)!\,x^{m+n+1}e^x\int_0^1\frac{y^m(y-1)^n}{m!n!}e^{-xy}dy,$$

则函数

$$R(x)=P(x)e^x-Q(x)\qquad (3)$$

在$x=0$有$m+n+1$阶零点.

定理1 对于任意给定的正数 ϵ，存在常数 C，使得对于任意的有理数 $\frac{p}{q}(q>0, p, q\in \mathbf{Z})$，

有

$$\left|e-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \quad q\geqslant C.$$

证明　在（1）式与（2）式中分别取

$$m=r-1,\ n=r \text{ 与 } m=r,\ n=r-1,$$

设相应地得到函数 $P_1(x)$，$Q_1(x)$，$R_1(x)$ 与 $P_2(x)$，$Q_2(x)$，$R_2(x)$，即

$$P_1(x)=\sum_{k=r-1}^{2r-1} k!(-1)^{k-1}C_k^{r-1}C_{2r-1}^k x^{2r-k-1}。$$

$$Q_1(x)=\sum_{k=r}^{2r-1} k!C_k^r C_{2r-1}^k x^{2r-k-1},$$

$$R_1(x)=C_{2r-1}^r x^{2r}e^x\int_0^1 y^{r-1}(y-1)^r e^{-xy}dy,$$

$$P_2(x)=\sum_{k=r}^{2r-1} k!(-1)^{k-1}C_k^r C_{2r-1}^k x^{2r-k-1},$$

$$Q_2(x)=\sum_{k=r-1}^{2r-1} k!C_k^{r-1} C_{2r-1}^k x^{2r-k-1},$$

$$R_2(x)=C_{2r-1}^r x^{2r}e^x\int_0^1 y^r(y-1)^{r-1}e^{-xy}dy,$$

由（3）式，

$$P_1(x)e^x-Q_1(x)=R_1(x),$$
$$P_2(x)e^x-Q_2(x)=R_2(x),$$

其中$R_1(x)$与$R_2(x)$在$x=0$都有$2r$阶零点，因此，对于函数

$$D(x)=\begin{vmatrix}P_1(x) & Q_1(x)\\ P_2(x) & Q_2(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}P_1(x) & -R_1(x)\\ P_2(x) & -R_2(x)\end{vmatrix},$$

由第一个行列式，它在$x=0$的零点的阶不大于$2r$，而由第二个行列式，它在$x=0$的零点的阶不小于$2r$，因此必是

$$D(x)=\lambda x^{2r}\quad(\lambda\neq 0).$$

于是

$$D(1)=\begin{vmatrix}P_1(1) & Q_1(1)\\ P_2(1) & Q_2(1)\end{vmatrix}\neq 0,$$

从而对 于任 意有 理数$\frac{p}{q}$，行列式

$$\begin{vmatrix}P_1(1) & Q_1(1)\\ q & p\end{vmatrix}\ \text{与}\ \begin{vmatrix}P_2(1) & Q_2(1)\\ q & p\end{vmatrix}$$

中至少有一个不为零，否则就要得出$D(1)=0$的矛盾．设这个不为零的行列式对应着$P_0(x)$,$Q_0(x)$，$R_0(x)$，令

$$P(x)=\frac{P_0(x)}{(r-1)!},\quad Q(x)=\frac{Q_0(x)}{(r-1)!},$$

$$R(x)=\frac{R_0(x)}{(r-1)!},$$

则$P(x)$，$Q(x)$是整系数多项式，而且

$$P(x)e^x-Q(x)=R(x),$$

$$\begin{vmatrix}P(1) & Q(1)\\ q & p\end{vmatrix}^2=|pP(1)-qQ(1)|^2\geqslant 1.$$

（4）

令

$$e-\frac{p}{q}=d\ ,$$

并与

$$P(1)e-Q(1)=R(1)$$

联合，推出

$$Q(1)-P(1)\frac{p}{q}=P(1)d-R(1),$$

$$|d|=\left|e-\frac{q}{p}\right|=\left|\frac{1}{P(1)}\left(Q(1)-P(1)\frac{p}{q}+R(1)\right)\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{q|P(1)|}(|qQ(1)-pP(1)|-q|R(1)|),$$

利用（ 4 ）式得到

$$|d|\geqslant\frac{1}{q|P(1)|}(1-q|R(1)|). \qquad (5)$$

由$P(x)$的定义，

$$|P(1)|\leqslant\frac{1}{(r-1)!}\max\left(\sum_{k=r-1}^{2r-1}k!\,C_k^{r-1}C_{2r-1}^k,\right.$$

$$\left.\sum_{k=r}^{2r-1}k!\,C_k^rC_{2r-1}^k\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=r-1}^{2r-1}(2r-1)!\,C_{2r-1}^r\ C_{2r-1}^k$$

$$\leqslant\frac{1}{(r-1)!}(2r-1)!\,2^{2r-1}\sum_{k=r-1}^{2r-1}C_{2r-1}^k$$

$$\leqslant \frac{(2r-1)!}{(r-1)!}4^{2r-1} \leqslant r!8^{2r-1}. \qquad (6)$$

由不等式

$$\max(t^{r-1}(t-1)^r,\ t^r(t-1)^{r-1}) \leqslant (t(t-1))^{r-1}$$
$$\leqslant 4^{-(r-1)},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

及$R(x)$的定义，得到

$$|R(1)| \leqslant \frac{1}{(r-1)!} C^r_{2r-1}\, e \int_0^1 4^{-(r-1)} dt$$

$$\leqslant \frac{1}{(r-1)!} 2^{2r-1} \cdot e \cdot 4^{-(r-1)} = \frac{2e}{(r-1)!}.$$

由此及（5），（6）式，得到

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{8^{2r-1} r!} \left(1 - q \frac{2e}{(r-1)!}\right).$$

$$(7)$$

对于任定的 $\epsilon > 0$，选取 r 使得

$$8^{2r-1} r! \leqslant q^{1+\epsilon} < 8^{2(r+1)-1}(r+1)!, \qquad (8)$$

则

$$(2r-1)\log 8 + (r+\tfrac{1}{2})\log r - r + o(1) \leqslant (1+\epsilon)\log q$$

$$\leqslant (2r+1)\log 8 + (r+\frac{3}{2})\log r - r + o(1),$$

$$r \sim (1+\epsilon)\frac{\log q}{\log\log q}. \qquad (9)$$

由此及（8）式可知

$$\frac{q}{(r-1)!} \cdot 2e = \frac{2eq}{(r+1)!} r(r+1) < \frac{4er^2}{q^\epsilon} 8^{2r+1} =$$

$$= O\left(\frac{1}{q^{\epsilon}}e^{\lambda r}\right) = O\left(e^{\lambda' \frac{\log q}{\log\log q} - \epsilon\log q}\right)$$

$$= o(1), \quad q \to \infty \tag{10}$$

其中λ与λ'都是常数

由上式及(7),(8)式得：当$q \geqslant C$时，

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

由于$\epsilon > 0$可以是任意给定的，所以定理得证.

证毕.

第二节 Hermite 等式

利用分部积分法，容易得到下面的引理.

引理1 设$f(x)$是实系数多项式，次数为m.

记

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\,du,$$

其中t是任意复数，积分路线为0到t的直线段，则

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t). \tag{11}$$

此外，若$f^*(x)$表示将$f(x)$的系数易为其绝对值所得到的多项式，则

$$|I(t)| \leqslant |t| e^{|t|} f^*(|t|). \tag{12}$$

这个引理给出了函数e^t用多项式逼近所得到的误差项.下面，我们使用引理1给出e与π的超越性的证明.

定理2 e与π是超越数.

(i)首先证明数 e 是超越数.如不然，则 e 是代数数，设它的次数为n，多项式

$$a_n x^n + \cdots\cdots + a_0$$

是它的最小多项式，于是

$$a_n e^n + \cdots\cdots + a_0 = 0. \tag{13}$$

对充分大的素数 p，令

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p,$$

$$J = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^i e^{i-x} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i I(i),$$

其中$I(t)$见于引理 1．由（11）及（13）式可以推出

$$J = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i f^{(j)}(i),\ m = (n+1)p - 1.$$

当 $j < p$，$i > 0$ 或 $j < p-1$，$i = 0$ 时，$f^{(j)}(i) = 0$,因此，对于一切$(j, i) \neq (p-1, 0)$,$p!$整除$f^{(j)}(i)$．此外，由

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

可知，若$p > n$，则$(p-1)!$整除$f^{(p-1)}(0)$，但$p!$ 不具备这一性质．所以，当 p 充分大时，数 J 是一个可以被 $(p-1)!$ 整除的非零整数，从而

$$|J| \geqslant (p-1)!. \tag{14}$$

但是，由（12）式应有

$$|J| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot i e^i f^*(i) \leqslant c^p,$$

其中 c 是常数．当 p 充分大时，上式与（14）式矛盾，这说明 e 不可能是代数数．

(ii)数π的超越性的证明．

若π是代数数，则$\theta=\pi i$也是代数数，以$\theta=\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_d$表示$\theta$的最小多项式的全部零点，并记$l=m(\theta)$．由$e^{i\pi}=-1$可知

$$(1+e^{\theta_1})(1+e^{\theta_2})(1+e^{\theta_3})\cdots(1+e^{\theta_d})=0. \tag{15}$$

上式左端可以写成2^d个e^β之和，其中

$$\beta=\epsilon_1\theta_1+\cdots+\epsilon_d\theta_d\quad,\quad \epsilon_i=0\text{或}1.$$

假设这些β中有n个不为零，记为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$那么（15）式成为

$$q+e^{\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_n}=0,\quad q=2^d-n.$$

设p是充分大的素数．令

$$f(x)=l^{np}x^{p-1}(x-\alpha_1)^p\cdots(x-\alpha_n)^p,$$

$$J=\sum_{k=1}^{n}I(\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\alpha_k}e^{\alpha_k-u}f(u)du$$

$$=-q\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k), \tag{16}$$

其中$m=(n+1)p-1$，则上式右端的和式$\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k)$是关于$l\alpha_1,\cdots,l\alpha_n$的对称多项式，因而也是诸$l\beta$的对称多项式，又是关于诸$l\theta$的对称多项式，因此是有理整数．当$j<p$时，

$$f^{(j)}(\alpha_k)=0\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

所以$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k)$可被$p!$整除．此外，当$j\neq p-1$时，$f^{(j)}(0)$也是可被$p!$整除的整数，但当$p$充分大时，

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!\,l^{np}(\alpha_1\cdots\alpha_n)^p$$

则是被$(p-1)!$整除而不能被$p!$整除的整数，这样，当p充分大时，应有$J\neq 0$而且$(p-1)!$整除J，所以

$$|J|\geqslant(p-1)!. \tag{17}$$

另一方面，由（12）及（16）式得到估计式

$$|J|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|e^{|\alpha_k|}f^*(|\alpha_k|)\leqslant c^p$$

（其中c是常数），当p充分大时与（17）式是矛盾的，故π必是超越数．

证毕．

第三节 Lindemann—Weierstrass 定理

在第一节中，我们选取适当的多项式$P(x)$与$Q(x)$，使得

$$P(x)e^x-Q(x)$$

在$x=0$处有一相当高阶的零点．将这一思想做进一步推广，我们考虑形如

$$\sum_{k=0}^{m}P_k(z)\,e^{\rho_k z}$$

的所谓"渐近式"，并由此证明 Lindemann—Weierstrass 定理．

定义1．设$\varphi(x)$是复系数多项式，或者，$\varphi(x)$具有任意阶导函数，而且$f(x)$是复系数多项式．规定算子$f(D)$为

$$f(D)\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nD^n\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x), \tag{18}$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad 0<|x|<R\ (0<R\leqslant\infty).$$

(19)

由此定义，容易得到下面的引理(证明留给读者)．

引理2．算子$f(D)$具有以下性质：

(i) $(f_1(D)+f_2(D))\varphi=f_1(D))\varphi+f_2(D)\varphi$.

(ii) $(f_1(D)f_2(D))\varphi=f_1(D)(f_2(D)\varphi)$.

(iii) 在(19)式中，若$a_0\neq0$,则存在

$$f^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\qquad(b_0=\frac{1}{a_0}),$$

使得

$$f^{-1}(D)f(D)\varphi=\varphi$$

对于任意的多项式$\varphi(x)$成立．

(Ⅳ) 若$f(x)$的展开式(19)中的系数都是整数，$\varphi(x)$是整系数多项式，则$f(D)\varphi$也是整系数多项式．若$a_0=\pm1$，则$f^{-1}(D)\varphi$也是整系数多项式．

(Ⅴ)设λ是常数，$P(x)$是多项式，则由

$$D^n(e^{\lambda x}P(x))=e^{\lambda x}Q(x)\qquad(20)$$

所确定的函数$Q(x)$是一个多项式，而且

$$Q(x)=(\lambda+D)^nP(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\lambda^{n-k}D^kP(x);$$

反之，当$Q(x)$给定时，关于未知量$P(x)$的方程(20)有唯一的多项式解

$$P(x)=(\lambda+C)^{-n}Q(x).$$

定义2．对于可积函数$\varphi(x)$，定义算子

$$J\varphi = \int_0^x \varphi(t)dt.$$

由此定义容易得到

$$DJ\varphi = \varphi(x), \quad JD\varphi = \varphi(x) - \varphi(0),$$

$$J^{n+1}\varphi = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi(t)dt \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(21)

引理3. 对于互不相同的m个复数$\rho_1,\cdots,\rho_m$，以及m个非负的有理整数$n_1,\cdots,n_m$，记

$$N = \sum_{k=1}^{m}(n_k+1)-1,$$

则存在次数分别为$n_1,\cdots,n_m$的多项式$P_1(x),\cdots,P_m(x)$，使得

$$R(x) = P_1(x)e^{\rho_1 x} + \cdots + P_m(x)\ e^{\rho_m x} = C\frac{x^N}{N!} + \cdots\cdots,$$

(22)

其中C是常数．当$C\neq 0$给定时，$P_1(x),\cdots,P_m(x)$唯一地确定．

证明．比较（22）式两端关于$x^0,x^1,\cdots,x^N$的系数，得到关于由诸$P_k(x)$的系数做为未知数（总数为$N+1$）的$N+1$个线性方程．由线性方程组理论容易推出，当$C\neq 0$给定时，这些系数是唯一确定的，且不全为零，因此，$P_1(x)$，……$P_m(x)$也唯一地确定．下面指出确定它们的方法．

当$m=1$时，所求的解显然是

$$P_1(x) = C\cdot\frac{x^{n_1}}{n_1!}.$$

当$m>1$时，为求$P_1(x),\cdots,P_{m-1}(x)$，由（22）式得到

$$D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x}) = \sum_{k=1}^{m} D^{n_m+1}(e^{(\rho_k-\rho_m)x}P_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1} e^{(\rho_k-\rho_m)x}(\rho_k-\rho_m+D)^{n_m+1}P_k$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1} e^{(\rho_k-\rho_m)x}Q_k. \qquad (23)$$

为叙述方便，记

$$N_m=\sum_{k=1}^{m}(n_k+1)-1,$$

则（23）式左端极即是

$$D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x}) = C\cdot\frac{x^{N_{m-1}}}{N_{m-1}!}+\cdots, \qquad (24)$$

因此，如果对于 $m-1$，（22）式中 的解可以确定，那么就可确定（23）中的多项式 $Q_1,\cdots,Q_{m-1}$，从而由

$$P_k=(\rho_k-\rho_m+D)^{-(n_m+1)}Q_k, \quad (1\leqslant k\leqslant m-1) \qquad (25)$$

确定 $P_1(x),\cdots,P_{m-1}(x)$. 这样，对于任意的自然数m，都可归纳地确定满足（22）式的m个多项式 $P_1(x),\cdots,P_m(x)$.

取 $c=1$，利用上述方法及归纳法，容易得到

$$P_k(x)=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(\rho_k-\rho_l+D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}$$

$$(k=1,2,\cdots,m). \qquad (26)$$

证毕.

引理4. 在引理3的条件下，取$C=1$，则

（Ⅰ） $$R(x)=\int\limits_{\substack{t_1+\cdots+t_m=x\\ t_1>0,\cdots,t_m>0}}\cdots\cdots\int\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}e^{\rho_k t_k}\right)$$

$$dt_1\cdots dt_{m-1}\quad(m\geqslant 2),(x>0);$$

（27）

（Ⅱ） 对于互不相同的$\rho_1,\cdots,\rho_m\in\mathbf{C}$，

$$|R(1)|\leqslant\frac{e^{|\rho_1|+\cdots+|\rho_m|}}{n_1!\cdots n_m!}\tag{28}$$

（Ⅲ） 对于互不相同的$\rho_1,\cdots,\rho_m\in\mathbf{R}$，

$$|R(1)|>0.\tag{29}$$

证明．令

$$S(x)=D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x})=Q_1(x)e^{(\rho_1-\rho_m)x}+\cdots+Q_{m-1}(x)e^{(\rho_{m-1}+\rho_m)x}.$$

则由（21）式得到

$$R(x)=e^{\rho_m x}J^{n_m+1}S(x)=e^{\rho_m x}\int_0^x\frac{(x-t)^{n_m}}{n_m!}S(t)dt.\tag{30}$$

当$m=2$时，由上式及$P_1(x)$的表达式可知

$$R(x)=e^{\rho_2 x}\int_0^x\frac{(x-t)^{n_2}}{n_2!}e^{(\rho_1-\rho_2)t}\frac{x^{n_1}}{n_1!}dt$$

$$=\int\limits_{\substack{t_1+t_2=x\\ t_1>0,t_2>0}}\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!}e^{\rho_1 t_1}e^{\rho_2 t_2}dt_1,\quad(x>0).$$

假设（27）式对于 $m-1$ 成立，由 $S(x)$ 的定义及（27）式推得

$$S(t)=\underset{\substack{t_1+\cdots+t_{m-1}=x\\ t_1>0,\cdots,t_{m-1}>0}}{\int\cdots\cdots\int}\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}e^{(\rho_k-\rho_m)\,t_k}\right)$$

$$dt_1\cdots dt_{m-2}\quad (t>0).$$

由此及（30）式，得到

$$R(x)=e^{\rho_m x}\int_0^x\frac{(x-t)^{n_m}}{n_m!}dt\underset{\substack{t_1+\cdots+t_{m-1}=t\\ t_1>0,\cdots,t_{m-1}>0}}{\int\cdots\cdots\int}$$

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}e^{(\rho_k-\rho_m)\,t_k}\right)dt_1\cdots dt_{m-2},$$

做变换 $t_m=x-t$ 即可得到对于m的（27）式．于是由归纳法证得结论(Ⅰ)

结论(Ⅱ)与(Ⅲ)，是(Ⅰ)的显然推论．

证毕．

引理5．在引理3的条件下，取 $C=1$，记

$$M=\max_{1\leqslant k<l\leqslant m}\frac{1}{|\rho_k-\rho_l|},$$

则

$$|P_k(1)|\leqslant 2^N(M+1)^N,\quad (1\leqslant k\leqslant m).\qquad (31)$$

证明．利用公式

$$(w+D)^{-n-1}=w^{-n-1}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n-1}{r}w^{-r}D^r$$

$$(w\neq 0),$$

其中 $\binom{\alpha}{r}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$，得到

$$\left|(\rho_k-\rho_l+D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right|\leqslant M^{n_l+1}\sum_{r=0}^{\infty}\left|\binom{-n_l-1}{r}\right|$$

$$\cdot M^r\cdot D^r\frac{x^{n_k}}{n_k!}=\left(\frac{1}{M}-D\right)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}(x>0,l\neq k),$$

由此及（26）式得：当$x>0$时，

$$|P_k(x)|\leqslant\left|\prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{m}\left(\frac{1}{M}-D\right)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{1}{M}-D\right)^{n_k-N}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right|$$

$$=M^{N-n_k}\sum_{r=0}^{n_k}\binom{N-n_k+r-1}{r}M^r\cdot D^r\frac{x^{n_k}}{n_k!}$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{n_k}\binom{N}{r}M^{N-n_k+r}x^{n_k-r}\leqslant 2^N(M+x)^N,$$

由此即可得到所需结论.

证毕.

定理3. (Lindemann-Weierstrass) 设 $b_1,\cdots,b_r$是互不相同的代数数，则对于任何不全为零的代数数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，必有

$$\lambda_1e^{b_1}+\cdots+\lambda_re^{b_r}\neq0. \qquad (32)$$

证明. 设$b_1,\cdots,b_r$中恰有p个数在$\mathbf{Q}$上线性无关，则存在p个在$\mathbf{Q}$上线无关的代数数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$，使得对于 $b_k(1\leqslant k\leqslant r)$，有$h_{ki}\in\mathbf{Z}(1\leqslant i\leqslant p)$使下式成立：

$$b_k = h_{k1}\alpha_1 + \cdots + h_{kp}\alpha_p.$$

而且，由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$的线性无关性，对于$k=1,2,\cdots,r$,数组$(h_{k1},\cdots,h_{kp})$是唯一确定的。

假设有一组不全为零的代数数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，使得(32)式成立，那么

$$\sum_{k=1}^{r}\lambda_k e^{b_k} = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k e^{h_{k1}\alpha_1+\cdots+h_{kp}\alpha_p}$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(e^{\alpha_1})^{h_{k1}}\cdots(e^{\alpha_p})^{h_{kp}}=0. \qquad (33)$$

考虑 p 元有理函数

$$F(x_1,\cdots,x_p)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x_1^{h_{k1}}\cdots x_p^{h_{kp}},$$

由数组$(h_{k1},\cdots,h_{kp})(1\leqslant k\leqslant r)$的性质，可知$F(x_1,\cdots,x_p)$不恒等于0．设

$$F(x_1,\cdots,x_p)=\frac{G(x_1,\cdots,x_p)}{Q(x_1,\cdots,x_p)},$$

其中G与Q是代数数系数的多项式，那么$G\neq 0$,而且

$$G(e^{\alpha_1},\cdots,\ e^{\alpha_p})=0. \qquad (34)$$

下面，要由(34)式导出一个矛盾，从而证明定理．

显然，不妨假定$G(x_1,\cdots,x_p)$的系数都是代数整数，设它们与$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$在Q上扩张生成的代数数域为K,$h=[\mathrm{K}:\mathrm{Q}]$.

设$G(x_1,\cdots,x_p)$的总次数是d.

选取充分大的自然数f，使得

$$\prod_{k=1}^{p}(f-d+k)>\left(1-\frac{1}{h}\right)\prod_{k=1}^{p}(f+k).$$

以$Y_1,\cdots,Y_m$与$Z_{m-r+1},\cdots,Z_m$分别表示总次数不超过f与$f-d$的所有单项式$x_1^{a_1}\cdots x_p^{a_p}$，则由归纳法容易证明

$$m=C_{f+p}^{p}\quad,\quad r=C_{f-d+p}^{p}.$$

对于$k=m-r+1,\cdots,m$，令

$$Z_kG=a_{k1}Y_1+a_{k2}Y_2+\cdots+a_{km}Y_m,$$

则 a_{kl} 是0或者是G的某一个系数．容易验证，由 a_{kl} 构成的矩阵(a_{kl}) 的秩是r．

另一方面，对于$Y_l=x_1^{a_{l1}}\cdots x_p^{a_{lp}}$，由$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$在Q上的线性无关性，可知数

$$\rho_l=g_{l1}\alpha_1+\cdots+g_{lp}\alpha_p\quad(1\leqslant l\leqslant m)$$

是K中的互不相同的数，而且

$$a_{k1}e^{\rho_1}+\cdots+a_{km}e^{\rho_m}=0\quad(m-r+1\leqslant k\leqslant m).$$

记

$$n_l(k)=\begin{cases}n, & 当1\leqslant l\leqslant k,\\ n-1, & 当k+1\leqslant l\leqslant m.\end{cases}$$

对于给定的$\rho_1,\cdots,\rho_m$及$n_1(k),\cdots,n_m(k)$，将在引理3中确定的$R(x)$记为

$$R_k(x)=P_{k1}(x)e^{\rho_1x}+\cdots+P_{km}(x)e^{\rho_mx},$$
$$(1\leqslant k\leqslant m),$$

其中$\deg P_{kl}(x)=n_l(k)$．

令

$$\triangle(x)=\begin{vmatrix}P_{11} & P_{12}\cdots P_{1m}\\ P_{21} & P_{22}\cdots P_{2m}\\ \cdots & \\ P_{m1} & P_{m2}\cdots P_{mm}\end{vmatrix},$$

从$\triangle(x)$的展开式容易看出，对应于主对角线的项为mn次多项式，而其余的项是次数$<mn$的多项式，因此

$$\deg\triangle(x)\leqslant mn.$$

另一方面，若以$\triangle_1,\cdots,\triangle_m$表示$\triangle(x)$第一列各元素的代数余子式，则

$$\triangle(x)=e^{-\rho_1 x}(\triangle_1 R_1+\cdots+\triangle_m R_m).$$

由于$R_k(x)$在$x=0$的零点的阶是

$$(n_1+\cdots+n_m)+m-1=mn+k-1\geqslant mn,$$

所以$\triangle(x)$在$x=0$的零点的阶不小于mn. 因此，必有$\gamma\neq 0$，使得

$$\triangle(x)=\gamma x^{mn},$$

从而

$$\triangle(1)=|P_{kl}(l)|_{k,l}\neq 0. \qquad (35)$$

这样，可以用矩阵$(a_{kl})_{k,l}$的r行与矩阵$(P_{kl}(1))_{k,l}$的$m-r$行构成一个m阶不为零的行列式，假设这$m-r$行是第$k_1,k_2,\cdots,k_{m-r}$行，记

$$P_{k_t l}(1)=a_{tl},\ R_{k_t}(1)=\beta_t,\ (t=1,2,\cdots,m-r),$$

$$\beta_k=0,\quad (m-r+1\leqslant k\leqslant m),$$

则

$$a_{k1}e^{\rho_1}+\cdots+a_{km}e^{\rho_m}=\beta_k\quad(1\leqslant k\leqslant m).$$

以$A_1,\cdots,A_m$表示行列式$|a_{kl}|_{k,l}$的第一列各元素的代

数余子式，则

$$\xi=(A_1\beta_1+\cdots+A_{m-r}\beta_{m-r})e^{-\rho_1}=|a_{kl}|_{k,l}\neq 0$$

（36）

是一个代数数.

另一方面，$\rho_1,\cdots,\rho_m$是与n无关的互不相同的代数数，因此由（26）式可知存在有理整数$T\leqslant C_1^n\cdot n!$，使得

$Ta_{kl}(k=1,2,\cdots,m-r,\ l=1,2,\cdots,m)$ 都是K中的代数整数，从而$T^{m-r}\xi$是代数整数，因此ξ的分母为

$$m(\xi)\leqslant(C_1^n\cdot n!)^{m-r}, \qquad (37)$$

其中C_1(及下面的$C_2,C_3,\cdots$)是与n无关的常数．显然ξ的次数$\leqslant h$．

以$\xi=\xi,\cdots,\xi_h$表示ξ在K中的共轭数，则由（31）式及$N\leqslant C_2 n$可知

$$\overline{|a_{kl}|}<C_3^n\ (1\leqslant k\leqslant m,1\leqslant l\leqslant m), \qquad (38)$$

$$\overline{|\xi|}<C_4^n. \qquad (39)$$

而由（28）式，又有

$$|\beta_k|\leqslant C_5 n^m(n!)^{-m}<C_6^n(n!)^{-m}\ (1\leqslant k\leqslant m-r).$$

由此及（36）与（38）式，得到

$$|\xi|<C_7^n(n!)^{-m}. \qquad (40)$$

利用第二章引理3，对于代数数ξ应有不等式

$$\log(C_7^n(n!)^{-m})\geqslant-(h-1)\log C_4^n$$

$$-h\log(C_1^n\cdot n!)^{m-r},$$

$$n\log C_7 - m\log n! \geqslant -n(h-1)\log C - h(m-r)(n\log C_1 + \log n!).$$

由于 n 可以充分大，所以欲使上式成立，应有

$$m \leqslant h(m-r),$$

即 $r \leqslant (1-\frac{1}{h})m$，这与 r 的选取是矛盾的，从而证明了定理的结论。

证毕。

第四节　对数函数的渐近式

在上一节中见到，对于函数 $e^{\rho_1 x}, \cdots, e^{\rho_m x}$，适当选取多项式 $P_1(x), \cdots, P_m(x)$，可使线性组合

$$P_1(x)e^{\rho_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\rho_m x}$$

在 $x=0$ 有一个高阶零点。对于函数 $\log x, \cdots, (\log x)^k$，也有类似的定理，此处 $\log x$ 表示对数函数取主值的分支。

定理 4．对于任意的自然数 m，n 及整数 h，$0 \leqslant h \leqslant m$，存在次数不超过 n 的有理数系数多项式 $A_{h0}(x), \cdots, A_{hm}(x)$，使得

$$R_h(x) = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(x)(\log x)^k$$

以 $x=1$ 为其 $(m+1)(n+1)-h-1$ 阶零点，而且

$$D(x) = \begin{vmatrix} A_{00}(x) & A_{01}(x) & \cdots & A_{0m}(x) \\ A_{10}(x) & A_{11}(x) & \cdots & A_{1m}(x) \\ \cdots\cdots & & & \\ A_{m0}(x) & A_{m1}(x) & \cdots & A_{mm}(x) \end{vmatrix}$$

$$=C(m,n)(x-1)^{(m+1)n}, \qquad (41)$$

其中$C(m,n)$是关于m，n的函数．

证明．以 N 表示数 1，2，…，n 的最小公倍数，$x^z=e^{z\log x}$，并记

$$P=m!N^m(n!)^{m+1},$$

$$Q(z)=(z(z+1)\cdots(z+n))^{m+1},$$

$$R_h(x)=\frac{Px^n}{2\pi i}\int_C\frac{z^h x^z}{Q(z)}dz,$$

其中积分路线是以$z=0$为园心的半径为ρ（$>n$）的正方向进行的园周．

当$|z|>n$时，有展开式

$$\frac{1}{Q(z)}=\sum_{k=(m+1)(n+1)}^{\infty}C_k z^{-k},$$

$$z^h x^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\log x)^k}{k!}z^{k+h},$$

因此，由复变函数理论，可知

$$R_h(x)=Px^n\sum_{k=(m+1)(n+1)}^{\infty}C_k\frac{(\log x)^{k-h-1}}{(k-h-1)!}$$

$$(0\leqslant h\leqslant m),$$

显然，它在$x=1$恰有一个

$$(m+1)(n+1)-h-1 \quad (\geqslant(m+1)n)$$

阶零点．

另一方面，由留数定理，若以r_λ表示函数$\frac{z^h x^z}{Q(z)}$在$z=-\lambda$的留数，则

$$R_h(x) = Px^n \sum_{\lambda=0}^{n} r_\lambda . \tag{42}$$

对于 $|z+\lambda|<1$，令

$$\frac{z^h}{Q(z)} = \sum_{k=-m-1}^{\infty} a(k,\lambda,h)(z+\lambda)^k , \tag{43}$$

则联合

$$x^z = x^{-\lambda} \cdot x^{z+\lambda} = x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log x)^k}{k!} (z+\lambda)^k$$

得出

$$r_\lambda = x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m} a(-k-1,\lambda,h) \frac{(\log x)^k}{k!},$$

从而由（42）式推出

$$R_h(x) = Px^n \sum_{\lambda=0}^{n} x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m} a(-k-1,\lambda,h) \frac{(\log x)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(x)(\log x)^k ,$$

其中

$$A_{hk}(x) = \frac{P}{k!} \sum_{\lambda=0}^{n} a(-k-1,\lambda,h) x^{n-\lambda} ,$$

$$(0 \leqslant h \leqslant m,\ 0 \leqslant k \leqslant m).$$

由$Q(z)$的表达式可知当 $\lambda=0$ 时在（43）中第一个不为零的系数是

$$a(h-m-1,0,h) = (n!)^{-m-1},$$

因此当$h+k=m$时，$A_{hk}(x)$ 是一个 n 次多项式，其最高幂项

为

$$\frac{P}{k!}(n!)^{-m-1}x^{n};$$

当$h+k\geqslant m+1$时，$A_{hk}(x)$是次数低于n的多项式．所以，由（41）式定义的行列式$D(x)$是一个$(m+1)n$次多项式，它的最高幂项为

$$\pm\frac{P^{m+1}(n!)^{-(m+1)^{2}}}{1!\,2!\cdots m!}x^{(m+1)n}.$$

但是，用$(\log x)^{j}$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ 分别乘以行列式$D(x)$的第$j+1$列并加到第一列，则第一列的元素成为$R_{0}(x)$，$R_{1}(x)$，…，$R_{m}(x)$，它们在$x=1$都至少有一个$(m+1)n$阶零点．因此，

$$(x-1)^{(m+1)n}\,|\,D(x),$$

所以（41）式成立，其中

$$C(m,n)=\pm\frac{P^{m+1}(n!)^{-(m+1)^{2}}}{1!\,2!\cdots m!}.$$

下面，说明$A_{hk}(x)$是有理整系数多项式．

对于$\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，有

$$z^{h}=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}(-\lambda)^{h-k}(z+\lambda)^{k} \qquad (44)$$

以及

$$\frac{1}{Q(z)}=(z+\lambda)^{-m-1}\prod_{i=1}^{\lambda}(z+\lambda-i)^{-m-1}$$

$$\prod_{j=1}^{n-\lambda}(z+\lambda+j)^{-m-1} \qquad (45)$$

$$=(-1)^{\lambda(m+1)}(\lambda!(n-\lambda)!)^{-m-1}\cdot(z+\lambda)^{-m-1}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1-\frac{z+\lambda}{i}\right)^{-m-1}\prod_{j=1}^{n-\lambda}\left(1+\frac{z+\lambda}{j}\right)^{-m-1},$$

其中规定乘积 $\prod_{i=1}^{0}=1$．由此及二项式级数定理，若记

$$(z+\lambda)^{-m-1}\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1-\frac{z+\lambda}{i}\right)^{-m-1}\prod_{j=1}^{n-\lambda}\left(1+\frac{z+\lambda}{j}\right)^{-m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b(k,\lambda)(z+\lambda)^{k-m-1},$$

则由N的定义，$N^k b(k,\lambda)$ 是有理整数．由级数乘法，$\frac{z^h}{Q(z)}$ 的级数展开式（43）中的系数是

$$a(k,\lambda,h)=(-1)^{\lambda(m+1)}(\lambda!(n-\lambda)!)^{-m-1}$$

$$\cdot\sum\binom{h}{k_1}(-\lambda)^{h-k_1}b(k_2,\lambda),$$

其中和号表示对于满足

$$0\leqslant k_1\leqslant h,\quad k_2\geqslant 0,\quad k_1+k_2=k+m+1$$

的k_1，k_2求和．因此，$(n!)^{m+1}N^{k+m+1}a(k,\lambda,h)$ 是有理整数，从而

$$(n!)^{m+1}N^{m-k}a(-k-1,\lambda,h)$$

$$(0\leqslant h,k\leqslant m,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant n)$$

是有理整数，因此，$A_{k,h}(x)$是有理整系数多项式．

证毕．

定理5．在定理 4 的条件下，对于$0\leqslant h\leqslant m$，$0\leqslant k\leqslant m$，下面的估计式成立：

(i). $|A_{\lambda}(x)| \leqslant \frac{1}{2} m! N^m (n+1)^{2m+1} 2^{(m+1)(n+1)}$

$$\cdot \sum_{i=0}^{n} |x|^i;$$

(ii). 对任意的$\rho \geqslant 2n$，有估计式

$$|R_{\lambda}(x)| \leqslant m! N^m (n!)^{m+1} \rho^{-n(m+1)} \exp[(\rho+n)$$

$$\cdot |\log x| + \frac{n(n+1)(m+1)}{\rho}].$$

证明. 由Cauchy定理及(43)式，

$$a(k,\lambda,h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{z^h}{Q(z)(z+\lambda)^{k+1}} dz, \qquad (46)$$

其中τ表示沿正方向进行的园周$|z+\lambda| = \frac{1}{2}$.

当$z \in \tau$时，对于$0 \leqslant h \leqslant m$，显然

$$|z|^h < (n+1)^m, \qquad (47)$$

而由(45)式，

$$\left| \frac{1}{Q(z)} \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-m-1} \left(\prod_{i=1}^{\lambda} \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \prod_{j=1}^{n-\lambda} \left(j - \frac{1}{2}\right) \right)^{-m-1}. \qquad (48)$$

容易得到

$$\min_{0 \leqslant \lambda \leqslant n} \left(\prod_{i=1}^{\lambda} \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-\lambda} \left(j - \frac{1}{2}\right) \right)$$

$$=\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(i-\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\left(j-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\binom{2n}{2\left[\frac{n}{2}\right]}^{-1}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot 2^{-2n}$$

以及

$$\binom{2n}{2\left[\frac{n}{2}\right]}\leqslant\binom{2n}{n},\quad\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\geqslant\frac{2^n}{n+1}.$$

代入（48）式，得到

$$\frac{1}{Q(z)}\leqslant 2^{(n+1)(m+1)}\left(\frac{n!}{n+1}\right)^{-(m+1)}.$$

将此式及（47）式代入（46）式可见，当$-m-1\leqslant k\leqslant -1$，

$$|a(k,\lambda,h)|\leqslant\frac{1}{2}(n+1)^{2m+1}2^{(m+1)(n+1)}(n!)^{-(m+1)}.$$

因此，对于$0\leqslant h,k\leqslant m$，

$$|A_{hk}(x)|=\left|\frac{P}{k!}\sum_{\lambda=0}^{n}a(-k-1,\lambda,h)x^{n-\lambda}\right|$$

$$\leqslant m!N^m(n!)^{m+1}\cdot\frac{1}{2}(n+1)^{2m+1}2^{(m+1)(n+1)}$$

$$\cdot(n!)^{-(m+1)}\sum_{\lambda=0}^{n}|x|^{\lambda},$$

由此得到结论(i).

对于$\rho\geqslant 2n$，以C表示半径为ρ的以原点为园心的正方

向进行的圆周，则

$$R_h(x)=\frac{P}{2\pi i}\int_C \frac{z^h x^{z+n}}{Q(z)}dz. \tag{49}$$

对于$z\in C$，$0\leqslant h,k\leqslant m$，有估计式

$$|z|^h\leqslant \rho^m,\quad |x^{z+n}|\leqslant e^{(\rho+n)|\log x|} \tag{50}$$

以及

$$|Q(z)|=|z^{n+1}(1+\frac{1}{z})\cdots(1+\frac{n}{z})|^{m+1}$$

$$\geqslant \rho^{(n+1)(m+1)}\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{i}{\rho})\right)^{m+1}.$$

由此及不等式

$$1-\frac{i}{\rho}=(1+\frac{i}{\rho-i})^{-1}\geq \exp(-\frac{i}{\rho-n}),$$

导出

$$|Q(z)|\geqslant \rho^{(n+1)(m+1)}\exp\left(-(m+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\rho-n}\right)$$

$$\geqslant \rho^{(n+1)(m+1)}\exp\left(-\frac{n(n+1)(m+1)}{\rho}\right).$$

将此不等式及（50）式代入（49）式，得到

$$|R_h(x)|\leqslant P\cdot\rho^m\cdot e^{(\rho+n)|\log x|}\cdot P\rho^{-(n+1)(m+1)}$$

$$\cdot\exp(n(n+1)(m+1)\frac{1}{\rho}),$$

稍加整理，即得结论(ii)。

证毕。

第五章 Hilbert 第七问题

1900年，Hilbert在他提出的著名的二十三个数学问题中，问到“对于任意的代数数$\alpha\neq 0,1$，及代数无理数β，α^β是否超越数？”他并且具体地举了$e^\pi=(-1)^{-i}$与$2^{\sqrt{2}}$为例。

1929年，А·О·Гельфонд证明，如果$\alpha\neq 0$，1是代数数，β是虚二次无理数，则α^β是超越数。因此，e^π是超越数。

1930年，Кузьмин将上述结论推广到β是实二次无理数的情形，从而得到$2^{\sqrt{2}}$的超越性证明。

1934年，А·О·Гельфонд与Th.Schneider互相独立地证明了：若$\alpha\neq 0,1$是代数数，β是代数无理数，则α^β是超越数。

在本章中，我们主要给出Гельфонд与Schneider对于下述定理的证明：

定理1 设α_1与α_2是非零代数数。对于确定的对数函数的分支$\log z$，若$\log\alpha_1$与$\log\alpha_2$在Q上线性无关，则对于不同时为零的代数数β_1,β_2，必有

$$\beta_1\log\alpha_1+\beta_2\log\alpha_2\neq 0.$$

由此定理，如果$\alpha\neq 0,1$是代数数，β是代数无理数，那么α^β是超越数。事实上，若$\alpha^\beta=\gamma$是代数数，那么

$$\beta\log\alpha-\log\gamma=0,$$

因此$\log\alpha$与$\log\gamma$必在Q上线性相关，即β是有理数，这是不可能的。

第一节 Гельфонд的证明

为了证明定理1，除了前面讲过的代数数性质，还需要下面的引理．

引理1 设$R>r>0$，$R\geqslant\rho>0$。又设$f(z)$在$|z|\leqslant R$上连续，在$|z|<R$上解析而且不恒为零．以$n_f(0,\rho)$表示$f(z)$在$|z|\leqslant\rho$内的零点个数（计及每个零点的重数），则

$$\log|f|_r\leqslant\log|f|_R-n_f(0,\rho)\log\frac{R^2-r\rho}{R(r+\rho)},$$

$$\log|f|_r\leqslant\log|f|_R-n_f(0,r)\log\frac{R^2+r^2}{2Rr},$$

其中

$$|f|_a=|f(z)|_a=\operatorname*{Sup}_{|z|=a}|f(z)|.$$

证明 记$n=n_f(0,\rho)$，以z_1，…，z_n表示$f(z)$在$|z|\leqslant\rho$中的全部零点（若z^*是$f(z)$的k重零点，则出现k次），则函数

$$f_1(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{R^2-z\bar{z}_j}{R(z-z_j)}$$

在$|z|\leqslant R$上连续，在$|z|<R$上解析．由极大模原则，

$$|f_1(z)|_r\leqslant|f_1(z)|_R.$$

由此及

$$\operatorname*{Sup}_{|z|=R}\left|\frac{R^2-z\bar{z}_j}{R(z-\bar{z}_j)}\right|=1,\ \operatorname*{Sup}_{|z|=r}\left|\frac{R^2-z\bar{z}_j}{R(z-z_j)}\right|\geqslant\frac{R^2-r\rho}{R(r+\rho)},$$

$$\sup_{|z|=r}\left|\frac{R^2-z\bar{z}_1}{R(z-z_1)}\right|\geqslant\frac{R^2+r^2}{2Rr}\qquad(\text{当}\rho=r)$$

即可得到引理结论.

证毕.

下面给出Гельфонд 对于定理1的证明.

取

$$L=N^4,\qquad T=N^6,\qquad H=N,$$

其中N是充分大的自然数. 记

$$F(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)\alpha_1^{\lambda_1 z}\alpha_2^{\lambda_2 z},\qquad(1)$$

$$F_t(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2\beta)^t\alpha_1^{\lambda_1 z}\alpha_2^{\lambda_2 z},\qquad(2)$$

其中

$$\beta=\frac{\log\alpha_2}{\log\alpha_1}.$$

设β是代数数，$D=[Q(\alpha_1,\alpha_2,\beta):Q]$，我们要由此假定导出矛盾，从而说明$\beta$是超越数.

由$F_t(z)$的表达式，显然得到

$$\frac{d^t}{dz^t}F(z)=(\log\alpha_1)^tF_tF_t(z).$$

（ⅰ）首先,我们证明,存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\lambda_2)$　$(0\leqslant\lambda_1,\ \lambda_2\leqslant L)$,使得

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant e^{N^6},$$

而且

$$F_t(h)=0,\qquad(0\leqslant t<T,\ 0\leqslant h<H),\qquad(3)$$

其中 t 与 h 仅取相应范围内的整数值。

为此，考虑关于$(L+1)^2$ 个未知数$p(\lambda_1,\lambda_2)$的齐次线性方程组

$$\sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2} p(\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2\beta)^t\alpha_1^{\lambda_1 h}\alpha_2^{\lambda_2 h}=0,\ (0\leqslant t<T,\ 0\leqslant h<H). \tag{4}$$

将上式两边乘以

$$(m(\beta))^T(m(\alpha_1))^{LH}(m(\alpha_2))^{LH},$$

则可得到一组新的线性方程，其系数是$K=Q(\alpha^1,\alpha_2,\beta)$中的代数整数，它们的模的最大值至多是

$$L^TC_1{}^TC_2{}^{LH}\leqslant N^{6N^6},$$

其中

$$C_1=(1+|\overline{\beta}|)m(\beta),C_2=|\overline{\alpha_1}|m(\alpha_1)|\overline{\alpha_2}|m(\alpha_2).$$

在这个方程组中,未知数的个数是$(L+1)^2$，方程个数是TH。由当N充分大时的不等式

$$DTH=DN^7<N^8<(L+1)^2$$

及第二章定理 4，存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\lambda_2)$满足（4）式（因而满足（3）式），并且

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant(\sqrt{2}(L+1)^2N^{6N^6})^{\frac{DTH}{(L+1)^2-DTH}}.$$

对于充分大的N，有

$$\sqrt{2}(L+1)^2N^{6N^6}\leqslant N^9N^{6N^6}<N^{8N^6},$$

$$\frac{DTH}{(L+1)^2-DTH}\leqslant\frac{DN^7}{N^8-DN^7}<N^{-\frac{1}{2}},$$

所以

$$\max|p(\lambda_1,\lambda_2)|<e^{N^6}.$$

（ii） 其次，我们证明对于任意的自然数$M\geqslant N$，有

$$F_t(h)=0,\qquad (0\leqslant t<M^6,\ 0\leqslant h<M),$$

其中t，h皆取整数值． （5）

使用归纳法。

由（i）的结论可知，当$M=N$时，（5）式是成立的．

假定（5）式对于$M(\geqslant N)$成立，那么对于

$$0\leqslant t_1<(M+1)^6,\qquad 0\leqslant h_1<M+1,$$

由Cauchy 公式可知

$$|F_{t_1}(h_1)|=\left|\frac{1}{(\log\alpha_1)^{t_1}}\frac{d^{t_1}}{dz^{t_1}}F(h_1)\right|$$

$$\leqslant\left|(\log\alpha_1)^{-t_1}\frac{t_1!}{2\pi i}\int_{|\zeta-h_1|=1}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-h_1)^{t_1+1}}d\zeta\right|$$

$$\leqslant|\log\alpha_1|^{-t_1}t_1!\cdot|F|_{h_1+1}. \tag{6}$$

在引理1中，取

$$R=M^3,\qquad r=M+1,$$

由归纳假设可以得到

$$\log|F|_{h_1+1}\leqslant\log|F|_{M^3}-M^7\log\frac{M^3}{2(M+1)}. \tag{7}$$

由（1）式及对于$p(\lambda_1,\lambda_2)$的上界估计，容易得到

$$|F|_{M^3}\leqslant(L+1)^2e^{N^6}\cdot C_3^{LM^3}\leqslant C_4^{M^7},$$

其中C_3，C_4（以及以后出现的C_5，…）是只与α_1，α_2，β 有关的常数．

由上式及（6）式与（7）式，得到

$$\log|F_{t_1}(h_1)|\leqslant-t_1\log C_5+\log(t_1!)+M^7\log C_4$$

$$-M^7\log\frac{M^2}{3}\leqslant -M^7\log M \tag{8}$$

对于充分大的N成立.

另一方面，数$F_{t_1}(h_1)$乘以

$$(m(\beta))^{t_1}(m(\alpha_1)m(\alpha_2))^{Lh_1}\leqslant e^{M^7}$$

后是一个代数整数，而且

$$\overline{|F_{t_1}(h_1)|}\leqslant (L+1)^2 e^{N^b} C_8^{Lh_1}\leqslant e^{M^7}.$$

因此，由第二章引理3，若$F_{t_1}(h_1)\neq 0$则必有

$$\log|F_{t_1}(h_1)|\geqslant -(D-1)\log e^{M^7}-D\log e^{M^7}$$

$$=-(2D-1)\log e^{M^7}.$$

当N（因而M）充分大时，上式与（8）式矛盾，所以必是$F_{t_1}(h_1)=0$.这样，只要开初取N的值充分大，则（ii）的结论由归纳法得证.

由以上讨论，可以看出，对于一切自然数t，都有

$$\frac{d^t}{dz^t}F(0)=0.$$

所以

$F(z)\equiv 0$,即

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)e^{(\lambda_1\log\alpha_1+\lambda_2\log\alpha_2)z}\equiv 0.$$

但是$\log\alpha_1$与$\log\alpha_2$在$\mathbf{Q}$上线性无关，所以由上式即可推出

$$p(\lambda_1,\lambda_2)=0 \qquad (0\leqslant\lambda_1\leqslant L,\quad 0\leqslant\lambda_2\leqslant L).$$

这与$p(\lambda_1,\lambda_2)$的选法矛盾. 这就证明了β不可能是代数数.

证毕.

第二节　Schneider的证明

沿用上节的记号 $\beta=\dfrac{\log\alpha_2}{\log\alpha_1}$. 假设$\beta$是代数数，将由此导出矛盾.

记

$$\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\qquad D=[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$$

又记

$$P(x_1x_2)=\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2}p(\lambda_1,\lambda_2)x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2},\qquad(9)$$

$$F(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2}p(\lambda_1,\lambda_2)z^{\lambda_1}\alpha_1^{\lambda_2 z},\qquad(10)$$

其中

$$L_1=N^8,\qquad L_2=N^8,$$

而$p(\lambda_1,\lambda_2)$是待定的有理整数，N是充分大的自然数.

（ i ）　首先证明，存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\lambda_2)$ $(0\leqslant\lambda_1\leqslant L_1,0\leqslant\lambda_2\leqslant L_2)$，使得

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant e^{N^8},\qquad(11)$$

而且

$$F(h_1+h_0\beta)=0,\qquad(0\leqslant h_1,h_0<H),\qquad(12)$$

其中h_1,h_0均取整数值，而

$$H=N^5.$$

为此，考虑关于$(L_1+1)(L_2+1)$个未知数$p(\lambda_1,\lambda_2)$的线性方程组

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2} p(\lambda_1,\lambda_2)(h_1+h_0\beta)^{\lambda_1}\alpha_1^{\lambda_2 h_1}\alpha_2^{\lambda_2 h_0}=0,$$

$$(0\leqslant h_0<H, 0\leqslant h_1<H). \qquad (13)$$

将上式两端乘以

$$(m(\beta))^{L_1}(m(\alpha_1)m(\alpha_2))^{L_2H},$$

就得到一组新的方程，它的系数是代数数域K中的代数整数，而且这些系数的模

$$\leqslant H^{L_1}C_1^{L_1}C_2^{L_2H}\leqslant N^{6N^8},$$

其中C_1, C_2（以及下面出现的$C_3, C_4, \cdots$）是只与$\alpha_1\alpha_2$，β有关的常数。由于当N充分大时

$$DH^2=DN^{10}<N^{11}<(L_1+1)(L_2+1),$$

利用第二章定理 4 可以推出，存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\lambda_2)$，$(0\leqslant\lambda_1\leqslant L_1,\quad 0\leqslant\lambda_2\leqslant L_2)$使得（12）式成立，而且

$$\max|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant(\sqrt{2}(L_1+1)(L_2+1)N^{6N^8})^{\frac{DH^2}{(L_1+1)(L_2+1)-DH^2}}.$$

但是

$$(L_1+1)(L_2+1)N^{6N^8}=(N^8+1)(N^3+1)N^{6N^8}\leqslant N^{7N^8},$$

$$\frac{DH^2}{(L_1+1)(L_2+1)-DH^2}=\frac{DN^{10}}{(N^8+1)(N^3+1)-DN^8}$$

$$\leqslant N^{-\frac{1}{2}},$$

因此，对于充分大的N，（11）式成立。

（ii） 其次证明：对于任意的整数$M\geqslant N$，有

$$F(h_1+h_0\beta)=0,\qquad 0\leqslant h_0, h_1<M^6, \qquad (14)$$

而且成立着不等式

$$\log|F|_{M^6} < -M^{10}. \tag{15}$$

下面分三个步骤证明上述二式．为叙述简洁，以（14）$_A$与（15）$_A$分别表示当M＝A时的（14）式与（15）式．

第一步：证明由（14）$_M$可以推出（15）$_M$．

在引理1中，取

$$R = M^7, r = M^6,$$

则由

$$|F|_R \leqslant (L_1+1)(L_2+1)e^{N^8} R^{L_1} C_3^{L_2 R} \leqslant C_4^{M^{10}}$$

以及由（14）$_M$所推出的

$$n_F(0, r)\log\frac{R^2+r^2}{2Rr} = n_F(0, M^6)\log\frac{M^{14}+M^{12}}{2M^{13}}$$

$$\geqslant M^{10}\log\frac{M}{2},$$

可以推出

$$\log|F|_{M^6} \leqslant M^{10}\log C_4 - M^{10}\log\frac{M}{2} < -M^{10},$$

即是（15）$_M$．

第二步：证明由（15）$_M$可以推出（14）$_{M+1}$．

设h_0与h_1是满足

$$0 \leqslant h_0 < (M+1)^5, \qquad 0 \leqslant h_1 < (M+1)^5$$

的自然数．由（15）$_M$式可知代数数 $\gamma = F(h_1 + h_0\beta)$ 的绝对值

$$|\gamma| = |F(h_1 + h_0\beta)| < e^{-M^{10}}, \tag{16}$$

而且γ的分母

$$m(\gamma) \leqslant (m(\beta))^{L_1}(m(\alpha_1)m(\alpha_2))^{L_2(M+1)^6}$$

$$\leqslant e^{M^9}. \tag{17}$$

此外，由 γ 的表达式，易知它的模

$$|\gamma| \leqslant (L_1+1)(L_2+1)e^{N^8}H^{L_1}C_1^{L_1}C_2^{L_2}(M+1)^5$$
$$\leqslant e^{M^9}.$$

由此及（16），（17）式，并利用第二章引理3可以推出：若$\gamma \neq 0$，则

$$\log(e^{-M^{10}}) > -(D-1)\log(e^{M^9}) - D\log(e^{M^9}),$$
$$-M^{10} > -(2D-1)M^9.$$

对于充分大的N（因而M也充分大），上式是不可能成立的，故必是$\gamma=0$，即$(14)_{M+1}$成立.

第三步：根据函数$F(z)$的构造可知，当$M=N$时，(14)与（15）是成立的，故结论（ii）成立。

这样，我们证明了，只要选取N充分大，那么

$$F(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2} p(\lambda_1, \lambda_2)z^{\lambda_1}\alpha_1^{\lambda_2 z} \equiv 0.$$

由此及$\log\alpha_1$与$\log\alpha_2$在Q上的线性无关性即可推出

$$p(\lambda_1, \lambda_2)=0 \qquad (0 \leqslant \lambda_2 \leqslant L_1 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant L_2),$$

这与$p(\lambda_1, \lambda_2)$的选法是矛盾的. 由此可知 β不可能是代数数.

证毕.

由证明过程看出，Гельфонд方法与 Schneider 方法的差别在于，前者利用了e^z 的微分特征，即 e^z 满足微分方程

$$y' - y = 0,$$

而后者则是利用 e^z 的另一特性

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

在下节中，给出由此二特性而延伸得到的推广.

第三节 定理的推广

利用Гельфонд的方法，可以将定理1到推广.

对于任一整函数$f(z)$，若

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{\log\log|f|_R}{\log R}<\infty, \tag{18}$$

则称$f(z)$是有限阶的整函数。若$g(z)$与$h(z)$都是有限阶整函数，则称$f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$是有限阶的半纯函数.

以下，设$\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\alpha)$是一个代数数域，$d=[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$，以$K[f_1,\cdots,f_n]$表示由有限阶半纯函数$f_1,\cdots,f_n$在$\mathbf{K}$上扩张所得到的环，即所有形如

$$\sum_{i_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n}a(i_1,\cdots,i_n)f_1^{i_1}\cdots f_n^{i_n}$$

的元素构成的集合，其中$N_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant n)$，诸$a(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbf{K}$

此外，设对于任意的$i(1\leqslant i\leqslant n)$，有$f_i'(z)\in K[f_1,\cdots,f_n]$，即

$$\frac{d}{dz}f_i(z)=\sum_{k_1=0}^{M_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{M_n}b_i(k_1,\cdots,k_n)f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}, \tag{19}$$

其中诸$b_i(k_1\cdots k_n)\in\mathbf{K}$.

为叙述简便，在不致引起误会的情况下，将由$\sum\limits_{(k)}$与$a(k)$分别表示

$$\sum_{k_1=0}^{M_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{M_n} \text{ 与 } q(k_1,\cdots k_n).$$

引理 2　对于任意的函数

$$A(z)=\sum_{l_1=0}^{N_0}\cdots\sum_{l_n=0}^{N_0} a_0(l_1,\cdots l_n)f_1^{l_1}(z)\cdots f_n^{l_n}(z),$$

其中诸$a(l)$是K中的数，有

$$A^{(j)}(z)=\sum_{l_1=0}^{N_j}\cdots\sum_{l_n=0}^{N_j}a_j(l_1,\cdots,l_n)f_1^{l_1}\cdots f_n^{l_n},\quad(20)$$

其中诸$a_j(l)$是K中的数，

$$N_j\leqslant N_0+jM,\qquad M=\max(M_1,\cdots,M_n),\quad(21)$$

而且

$$\max_{l_1\cdots l_n}|\overline{a_j(l_1,\cdots,l_n)}|\leqslant B_2\cdot B_1^{j}\cdot j!,\qquad(22)$$

其中B_1,B_2是只与n,N_0,M,以及诸$a_0(l)$和$b_i(k)$有关的常数。

证明．当$j=0$时，结论显然成立．

若（20）式成立，则由（19）式得到

$$A^{(j+1)}(z)=(A^{(j)}(z))'=\sum_{(l)}a_j(l)\frac{d}{dz}(f_1^{l_1}\cdots f_n^{l_n})$$

$$=\sum_{(l)}a_j(l)\sum_{i=1}^{n}l_if_i^{l_i-1}f_i'\prod_{p\neq i}f_p^{l_p}$$

$$=\sum_{(l)}a_j(l)\sum_{i=1}^{n}l_if_i^{l_i-1}\prod_{p\neq i}f_p^{l_p}\sum_{(k)}b_i(k)f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}$$

$$=\sum_{l_1=0}^{N_j}\cdots\sum_{l_n=0}^{N_j}a_j(l_1,\cdots,l_n)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{m_n}l_i\cdot$$

$$\cdot b_i(k_1,\cdots,k_n)f_i^{l_i+k_i-1}\prod_{p\neq i}f_p^{l_p+k_p}$$

$$=\sum_{l_1=0}^{N_{j+1}}\cdots\sum_{l_n=0}^{N_{j+1}}a_{j+1}(l_1,\cdots,l_n)f_1^{l_1}\cdots f_n^{l_n},$$

a其中

$$N_{j+1}\leqslant N_j+M,$$

$a_{j+1}(l)$是$a_j(l)$，l_i 以及 $b_i(k)$的线性组合，因而是K中的代数数，而且有估计式

$$\overline{|a_{j+1}(l)|}\leqslant B_3N_j\cdot\max_{(l)}\overline{|a_j(l)|},\tag{23}$$

其中B_3（以及下面的B_4，B_5，…）是只与n，N，M，以及诸$_0(l)$和$b_i(k)$有关的常数。

由归纳法容易得到

$$\overline{|a_j(l)|}\leqslant B_3^{\ j-1}N_{j-1}N_{j-2}\cdots N_0\max\overline{|a_0(l)|}\leqslant$$

$$\leqslant B_3^{\ j+1}N_0\max\overline{|a_0(l)|}\cdot\prod_{r=1}^{j-1}(N_0+rM)\leqslant B_2\cdot B_1^{\ j}\cdot j\,!.$$

证毕。

定义1 对于数$\xi_1,\cdots\xi_n$，如果存在一个系数在数域K内的多项式

$$P(x_1,\cdots x_n)=\sum_{i_1=0}^{d_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{d_n}p(i_1,\cdots i_n)x_1^{\ i_1}\cdots x_n^{\ i_n},$$

使得$P(\xi_1\cdots\xi_n)=0$，则称$\xi_1,\cdots\xi_n$在K上代数相关，否则，称它们在K上代数无关。

定理2 在本节的假设条件下，若$f_1(z),\cdots,f_n(z)$是整函数，而且$f_1(z)$与$f_2(z)$在K上代数无关，则使函数值$f_1(z),\cdots,f_n(z)$都是K中代数数的数值$z\in K$，至多是有限个。

证明　取定某个常数m。以C_1，C_2，$\cdots$表示只与$n,f_1,\cdots,f_n$，K或m有关的常数。

设k是充分大的自然数，记$L=[k^{\frac{3}{4}}]$，

$$F(z)\equiv P(f_1,f_2)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)f_1^{\lambda_1}(z)f_2^{\lambda_2}(z),$$

其中$P(x_1,x_1)$是二元多项式，$p(\lambda_1,\lambda_2)$是在下面要确定的有理整数。

假若定理结论不成立，则应有无穷多个互不相同的y_1，y_2，$\cdots$，使得

$$y_j\in \mathsf{K},\quad f_i(y_j)\in \mathsf{K},\quad (1\leqslant i\leqslant n,j\geqslant 1).$$

我们将由此假定推导出一个矛盾。

（ⅰ）　首先证明，存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\lambda_2)$ $(0\leqslant\lambda_1\leqslant L,0\leqslant\lambda_2\leqslant L)$，使得

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant k^{c_1k},\qquad (24)$$

而且

$$F^{(j)}(y_l)=0,\quad (0\leqslant j\leqslant k,1\leqslant l\leqslant m).\qquad (25)$$

事实上，在引理2中取$a_0(l)\equiv 1$，则

$$F^{(j)}(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)\frac{d^j}{dz^j}(f_1^{\lambda_1}(z)f_2^{\lambda_2}(z))$$

$$=\sum_{(\lambda)}p(\lambda)\sum_{r_1=0}^{N_j}\cdots\sum_{r_n=0}^{N_j}a_j(r_1,\cdots r_n)f_1^{r_1}(z)\cdots f_n^{r_n}(z),$$

其中N_j与$a_j(r)$满足（21）与（22）式。由引理2的证明过程可见，存在只与代数数

$$b_i(k),f_i(y_l)\qquad (1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant l\leqslant m)$$

的分母有关的常数D，使得在关于$p(\lambda_1,\lambda_2)$的方程

$(1\leqslant l\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant k)$

$$D^{N_j}F^{(j)}(y_l)=D^{N_j}\sum_{(\lambda)}p(\lambda)\sum_{(\tau)}\sigma_j(\tau)f_1^{\tau_1}(y_l)\cdots$$

$$\cdots f_n^{\tau_n}(y_l)=0 \tag{26}$$

中，$p(\lambda_1,\lambda_2)$的系数是代数整数，而且，由（22）式，这些代数整数的模的最大值

$$U\leqslant k^{C_3k}. \tag{27}$$

方程组（26)中未知数$p(\lambda_1,\lambda_2)$的个数是$(L+1)^2>k^{\frac{3}{2}}$，而方程的个数是$m(k+1)$。因此，由第二章 定理4可知，当充分大时，有 不全 为零的 有理整 数$p(\lambda_1,\lambda_2)(0\leqslant\lambda_1\leqslant L, 0\leqslant\lambda_2\leqslant L)$ 满足（26）式（因而满足（25）式），而 且

$$\max_{\lambda_1\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant$$

$$\leqslant(\sqrt{2}(L+1)^2U)^{\frac{dm(k+1)}{(L+1)^2-dm(k+1)}}. \tag{28}$$

对于充分大的 k，有下面的估计式：

$$\frac{dm(k+1)}{(L+1)^2-dm(k+1)}<\frac{2dmk}{k^{3/2}-dm(k+1)}$$

$$<\frac{C_4}{\sqrt[3]{k}}, \tag{29}$$

因此，由（27）式及（28）式，得到

$$\max|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant k^{C_1k}.$$

（ii） 其次证明：对于任意的$R\geqslant2$，有估计式

$$|F(z)|<\exp(C_5(k\log k+LR^{C_6})), |z|\leqslant R. \tag{30}$$

为此只要注意到，由于 $f_i(z)(1\leqslant i\leqslant n)$都是有限阶整函

数，所以存在C_6使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|f_i(z)|<e^{|z|^{C_6}}.$$

因此，由（24）式可以推出

$$|F(z)|_R\leqslant e^{2LR^{C_6}}(L+1)^2k^{C_3k}.$$

由此即可得到（30）式。

（iii） 现在证明，只要先取定充分大的m，那么当取R充分大时必有

$$F^{(i)}(y_l)=0,\quad (0\leqslant i\leqslant j,1\leqslant l\leqslant m),\quad (31)$$

对任意的自然数j成立。

事实上，若不然，则存在某个$j\in N$，使得（31）式成立，但存在某个l_0，$1\leqslant l_0\leqslant m$，使得

$$\gamma=F^{(j)}(y_{l_0})\neq 0.$$

由（ i ）可知$j>k$。

考虑整函数

$$G(z)=F(z)\prod_{l=1}^{m}(z-y_l)^{-j}.$$

容易看出

$$\gamma=j!G(y_{l_0})\prod_{\substack{l=1\\ l\neq l_0}}^{m}(y_{l_0}-y_l)^j.$$

取$R=j^{\frac{1}{4C_6}}$，那么当k充分大时，有

$$\max_{1\leqslant l\leqslant m}|y_l|<\frac{R}{2}.$$

因此，由极大模原则及（ii），并注意到$j\geqslant k$得到

$$|\gamma|\leqslant j!|G|_R\prod_{\substack{j=1\\ l\neq l_0}}^{m}(|y_{l_0}|+|y_l|)^j$$

$$\leqslant j!|F(z)\prod_{l=1}^{m}(z-y_l)^{-j}|_R C_7^{mj}$$

$$\leqslant j^j|F|_R\prod_{l=1}^{m}(R-\frac{R}{2})^{-j}C_7^{mj}$$

$$\leqslant j^j\exp(C_5(k\log k+LR^{C_6}))\left(\frac{R}{2}\right)^{-mj}C_7^{mj}$$

$$\leqslant j^j\exp(C_5(k\log k+k^{\frac{3}{4}}\cdot j^{\frac{1}{4}}))(\frac{1}{2}j^{\frac{1}{4C_6}})^{-mj}C_7^{mj}$$

$$\leqslant j^{C_8 j}C_9^{mj}\cdot j^{-\frac{m}{4C_6}j}=C_9^{mj}\cdot j^{\left(C_8-\frac{m}{4C_6}\right)j}. \quad (32)$$

另一方面，在引理2中取

$$A(z)=F(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}p(\lambda_1,\lambda_2)f_1^{\lambda_1}(z)f_2^{\lambda_2}(z).$$

则可知$\gamma=F^{(j)}(y_{l_0})$是K中的代数数，因而次数$\leqslant d$，而且

$$m(\gamma)\leqslant C_{11}^{j\log j}. \quad (33)$$

此外，由（18）式及γ的定义，得到

$$\overline{|\gamma|}\leqslant \mathrm{epx}(C_{12}j\log j).$$

这样，由第二章引理4可知，由于$\gamma\neq0$，必有

$$\log|r|\geqslant-(d-1)\log\overline{|\gamma|}-d\log m(\gamma).$$

利用（32），（33），（34），由上式得到

$$(C_8-\frac{m}{4C_8})j\log j+mj\log C_9\geqslant-(d-1)C_{18}j\log j$$

$$-dj\log j\log C_{11}.\qquad(35)$$

但是，由于开初假定有无穷多个互不相同的y_j，所以m可以取得充分大，此时（35）式就不能成立，这个矛盾说明，（31）式对于一切 $j\in\mathbf{N}$成立．因此$F(z)\equiv0$，即$f_1(z)$与$f_2(z)$满足

$$P(f_1,f_2)\equiv0.$$

此处$P(x_1, x_2)$是一个具有有理整系数的二元多项式．因此$f_1(z)$与$f_2(z)$是代数相关的，这与定理的假设矛盾．从而满定理条件的y_l只能是有限多个．

证毕。

定理2的结论当诸 $f_i(z)$是有限半纯函数时仍旧成立，为证明这一点，只需将上面的证明过程做适当的修改，请读者试证之．

第四节 Lehmer 问 题

设$\alpha\neq0$是d次代数数，$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$是 α 的最小多项式的全部零点，a_0是α的最小多项式的首项系数．记

$$M(\alpha)=|a_0|\cdot\prod_{i=1}^{d}\max(1,|\alpha_i|).$$

若α是代数整数，则必有$M(\alpha)\geqslant1$，若α是单位根，则$M(\alpha)=1$.

1857年，Kronecker 证明了：若$M(\alpha)=1$，则α必是单位

根.

1933年，D.H.Lehmer提出这样的问题：对于任意给定的 $\epsilon>0$，是否存在非零的代数整数α，使得 $1<M(\alpha)<1+\epsilon$?

下面，我们给出一个关于 Lehmer 问题的定理，用以说明Schneider方法的应用.

定理3 若α是$d(\geqslant d_0)$次代数整数，则当d_0充分大时，必有常数$C_1>0$，使得当

$$M(\alpha)<1+\frac{C_1}{d\log d} \tag{36}$$

时，α是单位根.

证明. 令

$$N=[C_2 d\log d], \qquad K=2N,$$

其中$[x]$表示x的整数部分，C_2是常数（下面予以确定），$\log x$表示对数函数取主值的分支，即$-\pi<I_m\log x\leqslant\pi$.

由Dirichlet原则，在数列$1,2,\cdots,1,20K$中总可选取数

$$r_1<r_2<\cdots<r_K,$$

使得

$$\max_{1\leqslant s\leqslant t\leqslant K}|I_m(\log\alpha^{r_s})-I_m(\log\alpha^{r_t})|\leqslant\frac{\pi}{10}.$$

记

$$\theta_1=\min_{1\leqslant k\leqslant K} I_m(\log\alpha^{r_k}),\ \theta=\theta_1+\frac{\pi}{20},$$

则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant K}|I_m(\log\alpha^{r_k})-i\theta|\leqslant\frac{\pi}{20}. \tag{37}$$

考虑函数

$$f(z)=e^{-i\theta z}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d}a_{kl}\alpha^{l-1+r_kz}.$$

由第二章定理3,可以选取不全为零的有理整数a_{kl}($1\leqslant k\leqslant K$, $1\leqslant l\leqslant d$),使得

$$f(n)e^{i\theta n}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d}a_{kl}\alpha^{l-1+r_kn}=0\qquad(1\leqslant n\leqslant N),$$

而且

$$\max_{k,l}|a_{kl}|\leqslant\sqrt{2}Kd\Big(\prod_{k=1}^{d}\max(1,|\sigma\alpha|)\Big)^{\frac{1}{d}(20KN+d)}$$

$$=\sqrt{2}Kd(M(\alpha))^{\frac{1}{d}(20KN+d)}$$

$$=\sqrt{2}KdM^{20KN+d}\qquad(38)$$

其中 $M=(M(\alpha))^{\frac{1}{d}}$.

下面，我们证明，当$d\geqslant d_0$，d_0充分大时，

$$f(n)=0,\qquad n=1,2,3,\cdots.\qquad(39)$$

当$n\leqslant N$时，(39)式显然成立．假定(39)式当$n\leqslant J$ ($\geqslant N$)时成立，下面证明必也有 $f(J+1)=0$.

由解析函数的极大模原则，以Γ表示园$|z|=2J+1$，则由

$$\left|\frac{f(J+1)}{\prod_{i=1}^{J}(J+1-i)}\right| \leqslant \max_{z\in\Gamma}\left|\frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{J}(z-i)}\right|,$$

得到

$$|f(J+1)| \leqslant \max_{z\in\Gamma}|f(z)|\frac{(J!)^2}{(2J)!}, \tag{40}$$

其中

$$\max_{z\in\Gamma}|f(z)| \leqslant \sqrt{2}(Kd)^2 M^{20KN+d}\overline{|\alpha|}^d e^{\Delta(2J+1)}, \tag{41}$$

而由（37）式，

$$\Delta = \max_{1\leqslant k\leqslant K}|\log\alpha^{r_k} - i\theta| \leqslant \left|20K\log|\alpha| + i\frac{\pi}{20}\right|. \tag{42}$$

显然可以假定 $|\alpha| = \overline{|\alpha|}$，于是

$$1 \leqslant |\alpha| \leqslant M(\alpha) < 1 + \frac{C_1}{d\log d}.$$

由此利用不等式$\log(1+x) \leqslant x\ (x \geqslant 0)$，得到

$$0 \leqslant \log|\alpha| \leqslant \frac{C_1}{d\log d}.$$

因此，当C_2确定后，适当选取C_1可使

$$(2J+1)\Delta \leqslant (2J+1)\left|20C_2 d\log d\cdot\frac{C_1}{d\log d} + i\frac{\pi}{20}\right| < J\log 2.$$

由此及（40）、（41）式得到

$$|f(J+1)|\leqslant\sqrt{2}(Kd)^2M^{20KN+d}\overline{|\alpha|}^d\cdot 2^J\frac{(J!)^2}{(2J)!}$$

$$\leqslant\sqrt{2}(Kd)^2M^{20KN+d}(M(\alpha))^d 2^J\cdot\frac{(J!)^2}{(2J)!}$$

$$\leqslant J\cdot 2^{-J}K^4M^{22KN}. \tag{43}$$

另一方面，由于α是d次代数整数，所以

$$\beta=f(J+1)e^{i\theta(J+1)}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d}a_{kl}\alpha^{l+r_k(J+1)}$$

也是d次代数整数．因此，如果$\beta\neq 0$，那么它在$\mathbf{Q}(\alpha)$上的范数

$$\prod_{i=1}^{d}\beta_i\geqslant 1, \tag{44}$$

其中$\beta=\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_d$是$\beta$在$\mathbf{Q}(\alpha)$上的共轭数．显然，对于$2\leqslant i\leqslant d$有

$$|\beta_i|=\left|\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d}a_{kl}\alpha_i^{l+r_k(J+1)}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{2}(Kd)^2M^{20KN+d}\cdot\max(1,|\alpha_i|)^{20K(J+1)+d},$$

于是

$$\left|\prod_{i=2}^{d}\beta_i\right|\leqslant(\sqrt{2}K^2d^2M^{20KN+d})^{d-1}$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{d}\max(1,|\alpha_i|)\right)^{d+20K(J+1)}$$

$$\leqslant(\sqrt{2}K^2d^2M^{20KN+d})^{d-1}(M(\alpha))^{d+20K(J+1)}$$

$$\leqslant K^{4d}(M(\alpha))^{42K(J+1)}.$$

由此及（43）、（44）式得到

$$J\cdot 2^{-J}K^4M^{22KN}\geqslant|f(J+1)|=|\beta|\geqslant(K^{4d}$$

$$(M(\alpha))^{42K(J+1)})^{-1},$$

$$2^J\leqslant JK^4M^{22KN}K^{4d}(M(\alpha))^{42K(J+1)}$$

$$\leqslant JK^{5d}(M(\alpha))^{64K(J+1)},$$

$$J\log 2\leqslant\log J+5d\log K+64K(J+1)\log M(\alpha).$$

对于确定了的C_2，取d_0充分大、C_1充分小则有

$$J\log 2\leqslant\log J+5d\log(C_2d\log d)+64C_2d\log d$$

$$\cdot(J+1)\frac{C_1}{d\log d}$$

$$\leqslant\log J+6d\log d+\frac{1}{2}\log 2\cdot J.$$

但是$J\geqslant N\geqslant C_2d\log d-1$，因此，若取$C_2$充分大，$d_0$也充分大，则上式是不可能成立的。这一矛盾说明，若适当选取C_2，C_1，d_0，则$\beta=f(J+1)=0$，这样，用归纳法证明了（39）式，即

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d}a_{kl}\alpha^{l+r_kn}\equiv\sum_{k=1}^{K}A_k\alpha^{r_kn}=0,(n=1,2,\cdots).$$

由于$a_{kl}(1\leqslant l\leqslant K,1\leqslant l\leqslant d)$不全为零，$\alpha$是$d$次代数数，所以$A_k(1\leqslant k\leqslant K)$不全为零．因此，至少有$k_1\neq k_2$，$1\leqslant k_1,k_2\leqslant K$使得

$$\alpha^{r_{k_1}}=\alpha^{r_{k_2}},$$

即α是单位根．

证毕。

第六章 代数数对数的线性形式

Гельфонд—Schneider定理由A. Baker将两个代数数对数的线性形式$\beta_1\log\alpha_1+\beta_2\log\alpha_2$推广到$n$个代数数对数的情形．他研究了

$$\Lambda=\beta_0+\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n, \qquad (1)$$

其中$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$,以及$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$都是代数数，而$\log z$则是对数函数的任一固定分支．

Baker方法是Гельфонд方法的发展，使用了更为复杂和巧妙的内插方法和复变函数理论，取得了深刻的结果．Baker方法及其结果，对超越数理论的发展产生了巨大的影响，并被用于其他数学分支。

第一节 Baker 定理及其推论

在本节中，首先叙述Baker定理以及由此得到的几个重要结论。

定理1 (Baker)．设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是非零代数数，$\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$在$Q$上线性无关，则对于任意不全为零的代数数$\beta_0$，$\beta_1$，$\cdots,\beta_n$，有

$$\beta_0+\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n\neq0$$

这一定理的证明放在下一节．下面，叙述由此定理可以推出的几个结论．

定理2 设$\alpha_1\cdots,\alpha_n$是非零代数数，β_0，β_1，$\cdots,\beta_n$是任意的代数数，$\beta_0\neq0$,则

$$\beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_n \log\alpha_n \neq 0.$$

证明．当$n=0$时，结论显然成立．

假定结论对于$n<m$成立，下面证明当$n=m$时结论也成立．

若$\log\alpha_1, \cdots\cdots, \log\alpha_m$在Q上线性无关，则由定理1可知结论成立．

若$\log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_m$在Q上线性相关，那么必存在不全为零的有理数$\rho_1, \cdots, \rho_m$，使得

$$\rho_1 \log\alpha_1 + \cdots + \rho_m \log\alpha_m = 0.$$

不妨设$\rho_r \neq 0$，此时

$$\begin{aligned} &\rho_r(\beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_m \log\alpha_m) \\ &= \beta_0' + \beta_1' \log\alpha_1 + \cdots + \beta_m' \log\alpha_m, \end{aligned} \qquad (2)$$

其中

$$\beta_0' = \rho_r \beta_0 \neq 0, \qquad \beta_j' = \rho_r \beta_j - \rho_j \beta_r, (1 \leqslant j \leqslant m).$$

因此，(2)式右端实际上是关于$1, \log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_{r-1} \log\alpha_{r+1}, \cdots, \log\alpha_m$的线性形式．由于已经假定定理结论对于$n<m$成立，所以

$$\rho_r(\beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_m \log\alpha_m) \neq 0.$$

由此即得到$n=m$时的结论．

定理由归纳法得证．

证毕．

定理3．对于任意的非零代数数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$，数

$$e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$$

必是超越数．

证明．若

$$e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n} = \alpha_{n+1}$$

是代数数，那么

$$\beta_1\log\alpha_1+\beta_2\log\alpha_2+\cdots+\beta_n\log\alpha_n-\log\alpha_{n+1}$$
$$(=-\beta_0)$$

是非零代数数，这与定理2矛盾，因此α_{n+1}不可能是代数数.

证毕。

定理 4．设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是异于0，1的代数数，$\beta_1,\cdots,\beta_n$是在Q上线性无关的一组代数数，那么

$$\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n\neq 0.$$

证明．当$n=1$时，定理结论显然成立.

设结论对于$n<m$成立，今证明当$n=m$时结论也成立.

若$\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_m$在Q上线性无关，则当$n=m$时的定理结论可由定理1得出。

若$\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_m$在Q上线性相关，那么，必有不全为零的有理数$\rho_1,\cdots,\rho_m$，使得

$$\rho_1\log\alpha_1+\cdots+\rho_m\log\alpha_m=0.$$

不妨设$\rho_r\neq 0$，于是

$$\rho_r(\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_m\log\alpha_m)=\beta_1'\log\alpha_1+\cdots+$$
$$+\beta_m'\log\alpha_m,$$

其中

$$\beta_i'=\rho_r\beta_i-\rho_i\beta_r,\qquad(1\leqslant i\leqslant m).$$

在上式右端，由于$\beta_r'=0$，所以它其实是关于$\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_{r-1},\log\alpha_{r+1},\cdots,\log\alpha_m$的线性组合，而且由于$\beta_1,\cdots,\beta_m$在Q上线性无关，所以

$$\beta_1',\cdots,\beta_{r-1}',\beta_{r+1}'\cdots\beta_m'$$

在Q上也线性无关，因此，由归纳假设可知

$$\beta_1'\log\alpha_1+\cdots+\beta_m'\log\alpha_m\neq 0,$$

从而得到当$n=m$时的结论.定理由归纳法得证.

证毕.

推论1. 设$\alpha_1,\cdots\alpha_n$是不为0或1的代数数，又设1，β_1，$\cdots,\beta_n$是在Q上线性无关的一组代数数，则

$$\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

是超越数.

证明．令

$$\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}=\alpha_{n+1},$$

则

$$\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n-\log\alpha_{n+1}=0.$$

由于1，$\beta_1,\cdots,\beta_n$在Q上线性无关，所以由定理4可知α_{n+1}不可能是代数数.

推论2. 对于任意的非零代数数α与β，数

$$\pi+\log\alpha,\qquad e^{\alpha\pi+\beta}$$

都是超越数.

证明.由

$$\pi+\log\alpha=-i\log(-1)+\log\alpha$$

并利用推论1,可知$\pi+\log\alpha$是超越数.

由

$$e^{\alpha\pi+\beta}=e^{\beta}(-1)^{-i\alpha}$$

及定理3,可知$e^{\alpha\pi+\beta}$是超越数.

第二节　指数多项式

为了证明定理1，需要证明两个引理.为此，首先引进指数多项式，即形如

$$F(z)=\sum_{h=1}^{l}\sum_{j=1}^{\rho_h}b_{hj}z^{j-1}e^{\alpha_h z}$$

的函数．在本节中，将对指数多项式的零点个数做出估计．

引理1． 设$p_1, \cdots, p_l$是正整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$都是任意复数，$z_0$是复数．记

$$n = p_1 + \cdots + p_l, \qquad \Omega = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} |\alpha_k|.$$

则存在多项式

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^{i-1}$$

满足下面的条件：

$$\text{(i)} \quad \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(\alpha_k) = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} (e^{z_0 z}) \Big|_{z = \alpha_k}$$

$$(1 \leqslant j \leqslant p_k, 1 \leqslant k \leqslant l); \tag{3}$$

$$\text{(ii)} \sum_{i=1}^{n} (i-1)! |a_i| \leqslant e^{\Omega(|z_0|+1)} \sum_{i=1}^{n} |z_0|^{i-1}. \tag{4}$$

证明．为叙述方便，记

$$(w_1, \cdots w_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_l, \cdots, \alpha_l),$$

其中右端每个α_i出现p_i次．

以Γ表示圆周$|z| = \Omega + 1$，D表示区域$|z| < \Omega + 1$，对于任意的$\zeta \in D, z \in \Gamma$，以及任意的$w_i$，容易证明

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - w_i} + \frac{\zeta - w_i}{z - w_i} \cdot \frac{1}{z - \zeta}.$$

由此及归纳法可以推出

$$\frac{1}{z - \zeta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{s<i} (\zeta - w_s)}{\prod_{s \leq i} (z - w_s)} + \frac{\prod_{s \leq n} (\zeta - w_s)}{(z - \zeta) \prod_{s \leq n} (z - w_s)} \tag{5}$$

对于任意的自然数 n 成立，其中规定

$$\prod_{s<1}(\zeta-w_s)=1.$$

因此，由Canchy积分公式可知

$$e^{z_0\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{z_0 z}}{z-\zeta}dz$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\prod_{s<i}(\zeta-w_s)-R_n(\zeta),$$

此处

$$C_i=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z_0 z}\prod_{s\leq i}(z-w_s)^{-1}dz\,(1\leqslant i\leqslant n),\quad(6)$$

$$R_n(\zeta)=\prod_{s\leq n}(\zeta-w_s)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z_0 z}\prod_{s\leq n}(z-w_s)^{-1}dz.$$

显然

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}R_n(z)\Big|_{z=\alpha_i}=0,\quad(1\leqslant i\leqslant l,1\leqslant j\leqslant p_i)$$

所以多项式

$$P(z)=\sum_{i=1}^{n}C_i\prod_{s<i}(z-w_s)$$

满足（3）式。

下面证明（4）式。

令

$$\prod_{s=1}^{i}(z-w_s)^{-1}=\sum_{r=0}^{\infty}A_{r,i}z^{-(r+i)}.$$

容易看出，$A_{r,i}$ 是 C^r_{r+i-1} 个形如

$$w_1^{r_1}\cdots w_i^{r_i} \qquad (r_1+\cdots+r_i=r)$$

的数之和，因此

$$|A_{r,i}|\leqslant C^r_{r+i-1}\Omega^r, \qquad (r\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n).$$

于是，由

$$C_i=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z_0z}\left(\sum_{r=0}^{\infty}A_{r,i}\frac{1}{z^{r+i}}\right)dz$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z_0^{r+i-1}}{(r+i-1)!}A_{r,i},$$

得到

$$|C_i|\leqslant\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|z_0|^{r+i-1}}{(r+i-1)!}\cdot C^r_{r+i-1}\Omega^r$$

$$\leqslant\frac{|z_0|^{i-1}}{(i-1)!}e^{\Omega|z_0|}, \qquad (1\leqslant i\leqslant n). \quad (7)$$

另一方面，令

$$P(z)=\sum_{i=1}^{n}a_iz^{i-1},$$

则由（7）式推出

$$a_i=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}P(z)\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{(i-1)!}\sum_{j=1}^{n}C_j\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\Big(\prod_{s<j}(z-w_s)\Big)\Big|_{z=0},$$

$$|(i-1)!a_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|C_j|\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\Big(\prod_{s<j}(z+\Omega)\Big)\Big|_{z=0}$$

$$\leqslant e^{|z_0|\Omega}\sum_{j=i}^{n}|z_0|^{j-1}\frac{\Omega^{j-i}}{(j-i)!},$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)!|a_i| \leqslant e^{|z_0|\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|z_0|^{j-1}$$

$$\cdot\frac{\Omega^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$=e^{|z_0|\Omega}\sum_{j=1}^{n}|z_0|^{j-1}\sum_{i=1}^{j}\frac{\Omega^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$\leqslant e^{(|z_0|+1)\Omega}\sum_{j=1}^{n}|z_0|^{j-1},$$

此即（4）式.

证毕.

引理2．设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,p_1\cdots,p_l$，$n$ 以及Ω 的意义同于引理1．设$\rho>0$，则函数

$$F(z)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k}b_{kj}z^{j-1}e^{\alpha_k z}(\not\equiv 0)$$

在$|z|\leqslant\rho$中零点的个数

$$n(0,\rho)\leqslant 2(n-1)+5\Omega\rho.$$

证明．设z_0是任意复数，则由引理1可知，对于函数

$$F(rz)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k}b_{kj}r^{j-1}z^{j-1}e^{r\alpha_k z},$$

存在多项式

$$P(z)=\sum_{i=1}^{n}a_i z^{i-1}$$

满足相应的（4）和(3)式以及

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}P(z)\Big|_{z=r\alpha_k}=\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(e^{z_0 z})\Big|_{z=r\alpha_k}$$

$$=z_0^{\,j-1}e^{r\alpha_k z_0}.$$

因此

$$F(rz_0)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k}b_{kj}r^{j-1}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i z^{i-1})\right)\Bigg|_{z=r\alpha_k}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k}b_{kj}r^{j-1}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}z^{i-1}\Big|_{z=r\alpha_k}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k}b_{kj}r^{j-1}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z^{j-1}e^{r\alpha_k z})\Big|_{z=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}F(rz)\Big|_{z=0}.$$

利用（4）式，得到

$$|F(rz_0)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}(i-1)!\,|a_i|\frac{1}{(i-1)!}$$

$$\cdot\left|\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}F(rz)\right|_{z=0}$$

$$\leqslant|F|_r e^{r\Omega(|z_0|+1)}\sum_{i=1}^{n}|z_0|^{i-1},$$

其中$|F|_r$表示$F(z)$在$|z|\leqslant r$上的最大模. 由上式得到，当$R>r$时

$$|F|_R\leqslant|F|_r e^{\Omega(R+r)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{i-1}=|F|_r e^{\Omega(R+r)}$$

$$\cdot \frac{R^n - r^n}{r^{n-1}(R-r)}. \tag{8}$$

另一方面，由第五章引理1，下面的不等式成立 $(R>r, R>\rho)$：

$$\log|F|_r \leqslant \log|F|_R - n(0,\rho)\log\frac{R^2 - r\rho}{R(r+\rho)},$$

由此及（8）式，对于$R>\rho$，有

$$n(0,\rho)\ \log\frac{R^2 - r\rho}{R(r+\rho)} \leqslant \Omega(R+r) + \log\ \frac{R^n - r^n}{r^{n-1}(R-r)}$$

$$\leqslant \Omega(R+r) + (n-1)\ \log\frac{R}{r} + \log\frac{R}{R-r}$$

$$\leqslant \Omega(R+r) + (n-1)\log\frac{R}{r} + \frac{r}{R-r}.$$

当$n=1$时，引理结论显然成立，因此不妨设 $n\geqslant 2$.此时上面的不等式可以写成

$$n(0,\rho)\log\frac{R^2 - r\rho}{R(r+R)} \leqslant \Omega(R+r)$$

$$+ (n-1)\left(\log\frac{R}{r} + \frac{r}{R-r}\right). \tag{9}$$

取 $R=18r$，$r=\frac{82}{243}\rho$，则

$$\frac{R^2 - r\rho}{R(r+\rho)} \approx \frac{9}{2},$$

$$\log\frac{R}{r}+\frac{r}{R-r}=\log 18+\frac{1}{17}.$$

将这些数值代入（9）式，并做简单估计，即可得到引理结论.

证毕.

第三节 Baker 定理的证明

为了叙述简便，我们只给出$\beta_0=0$时的定理1的证明，即证明下面的定理：

定理1′ 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$是非零代数数，且$\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_{n+1}$在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关，则对于任意的不全为零的代数数$\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$，必有

$$\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n+\beta_{n+1}\log\alpha_{n+1}\neq 0.$$

证明. 若定理结论不成立，则存在不全为零的代数数$\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$，使得

$$\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_{n+1}\log\alpha_{n+1}=0.$$

不妨设$\beta_{n+1}=-1$.于是上式成为

$$\log\alpha_{n+1}=\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n. \qquad (10)$$

下面要由（10）式导出一个矛盾，从而证明定理的结论.

以N表示充分大的自然数，并记

$$L=N^{2n+2}, \qquad T=N^{2n+4}.$$

（i）首先证明，存在不全为零的有理整数$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$（$0\leqslant\lambda_i\leqslant L,\lambda_i\in N,1\leqslant i\leqslant n+1$），满足条件：

$$\max_{(\lambda)}|p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})|\leqslant e^{N^{2n+4}},$$

而且使得下面的等式成立：

$$F_{\tau}(h)=0(0\leqslant h<N), \tag{11}$$

其中

$$F(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\cdots\sum_{\lambda_{n+1}=0}^{L}p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\alpha_1^{\lambda_1 z}\cdots$$

$$\cdot\alpha_{n+1}^{\lambda_{n+1}z},$$

$$F_{\tau}(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\cdots\sum_{\lambda_{n+1}=0}^{L}\quad p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\gamma_1^{\tau_1}\cdots\gamma_n^{\tau_n}$$

$$\cdot\alpha_1^{\gamma_1 z}\cdots\alpha_n^{\gamma_n z},$$

$$\gamma_i=\lambda_i+\lambda_{n+1}\beta_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$

$$0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n\leqslant T-1,\tau_i\geqslant 0,\tau_i\in\mathbf{Z}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

以下，为方便计，记

$$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n).$$

为了证明上述结论，我们指出，由（10）式可知，(11)式即是

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L}\cdots\sum_{\lambda_{n+1}=0}^{L}p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\gamma_1^{\tau_1}\cdots\gamma_n^{\tau_n}\alpha_1^{\lambda_1 h}$$

$$\cdots\alpha_{n+1}^{\lambda_{n+1}h}=0,$$

$$(0\leqslant h<N,0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n\leqslant T-1,\tau_i\geqslant 0,$$

$$\tau_i\in\mathbf{Z},1\leqslant i\leqslant n). \tag{12}$$

现在，视$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$为未知量，那么上式就是关于$(L+1)^{n+1}$个未知量$p(\lambda,\cdots,\lambda_{n+1})(0\leqslant\lambda_i\leqslant L,1\leqslant i\leqslant n+1)$的

$$NC_{T+n}^{n}(\leqslant NT^n)$$

个方程．将每个方程乘以

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(m(\beta_i))^{\tau_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n+1}(m(\alpha_j))^{Lh}\right),$$

就得到一组新的方程，其中未知量$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$的系数是代数数域 $\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1},\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 中的代数整数，而且对于任一个系数（设为δ），有估计式

$$\overline{|\delta|}\leqslant\prod_{i=1}^{n}(m(\beta_i))^{\tau_i}\prod_{j=1}^{n+1}(m(\alpha_j))^{LN}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}(L(1+\overline{|\beta_i|}))^{\tau_i}\cdot\prod_{i=1}^{n+1}(\overline{|\alpha_i|}^{LN})$$

$$\leqslant C_1{}^T C_2{}^{LN}L^T\leqslant\exp((2n+3)N^{2n+4}\log N),$$

其中C_1,C_2是只与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1},\beta_1,\cdots,\beta_n$有关的常数。

设$d=[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$。

在第二章定理4中，取n的数值为$(L+1)^{n+1}$，m的数值为$NC^n{}_{T+n}$，则

$$\frac{dm}{n-dm}\leqslant\frac{dNT^n}{(L+1)^{n+1}-dNT^n}$$

$$<\frac{dN^{n(2n+4)+1}}{N^{(n+1)(2n+2)}-dN^{n(2n+4)+1}}<N^{-\frac{1}{2}},$$

因此，存在不全为零的有理整数

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\qquad(0\leqslant\lambda_i\leqslant L,1\leqslant i\leqslant n+1),$$

使得（11）式成立，而且

$$\max|p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})|\leqslant(\sqrt{2}NT^n$$
$$\cdot\exp((2n+3)N^{2n+4}\log N))^{N^{-\frac{1}{2}}}\leqslant e^{N^{2n+4}}.$$

（ii） 其次，我们用归纳法证明：若取$S=2(n+1)^2$，那么，对于任意的非负整数$s\leqslant S$，有

$$F_\tau(h)=0 \tag{13}$$

对于

$$0\leqslant h<N^{s+1},\ 0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n<\frac{T}{2^s},\ \tau_i\in\mathbf{Z},\ \tau_i\geqslant 0,$$

$1\leqslant i\leqslant n$ 成立。

事实上，当$s=0$时，这就是（i）中确定$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$的条件，所以（13）式当然成立。

假定（13）式对于$s-1(1\leqslant s\leqslant S)$成立，即

$$F_\tau(h)=0 \tag{14}$$

对于 $0\leqslant h<N^s$，$0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n<\frac{T}{2^{s-1}}$成立。

由Leibnize公式可知

$$\frac{d^k}{dz^k}F_\tau(z)=\frac{d^k}{dz^k}\Big(\sum_{\lambda_1=0}^{L}\cdots\sum_{\lambda_{n+1}=0}^{L}p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})$$

$$\cdot\gamma_1^{\tau_1}\cdots\gamma_n^{\tau_n}\alpha_1^{\gamma_1 z}\cdots\alpha_n^{\gamma_n z}\Big)$$

$$=\sum_{\lambda_1=0}^{L}\cdots\sum_{\lambda_{n+1}=0}^{L}p(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\gamma_1^{\tau_1}\cdots\gamma_n^{\tau_n}$$

$$\cdot\sum_{\substack{\sigma_1+\cdots+\sigma_n=k\\0\leqslant\sigma_i\leqslant k}}\frac{k!}{\sigma_1!\cdots\sigma_n!}(\gamma_1\log\alpha_1)^{\sigma_1}$$

$$\cdots(\gamma_n\log\alpha_n)^{\sigma_n}\cdot\alpha_1^{\gamma_1 z}\cdots\alpha_n^{\gamma_n z}$$

$$=\sum_{\substack{\sigma_1+\cdots+\sigma_n=k\\0\leqslant\sigma_i\leqslant k}}\frac{k!}{\sigma_1!\cdots\sigma_n!}(\log\alpha_1)^{\sigma_1}\cdot$$

$$\cdots(\log\alpha_n)^{\sigma_n}F_{\tau+\sigma}(z). \tag{15}$$

因此，对于

$$0\leqslant h<N^s,\qquad 0\leqslant k<\frac{T}{2^s},0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n<\frac{T}{2^s},$$

由（14）及（15）式得到

$$\frac{d^h}{dz^h}F_\tau(z)=0,$$

即 $F_\tau(z)$ 在每一个点 $z=h\in\mathbf{Z},0\leqslant h<N^s$，都至少有一个 $\left[\frac{T}{2^S}\right]$阶零点。

在第五章引理1中，取

$$r=N^{s+1},R=N^{s+2},f(z)=F_\tau(z),$$

则可得到

$$n_f(0,\ r)\geqslant N^s\left[\frac{T}{2^S}\right],$$

$$|f|_R\leqslant(L+1)^{n+1}e^{N^{2n+4}}(C_3L)^{\tau_1+\cdots+\tau_n}C_4{}^{LR}$$
$$\leqslant C_5{}^{N^{2n+s+4}},$$

其中C_3,C_4,C_5都是只与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1},\beta_1,\cdots,\beta_n$有关的常数．利用该引理的结论可见到，对于

$$0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n<\frac{T}{2^S},\qquad 0\leqslant h<N^{s+1},$$

有的下面的不等式：

$$\log|F_\tau(h)|\leqslant\log|F_\tau|_r\leqslant\log|F_\tau|_R-N^s\left[\frac{T}{2^S}\right]$$

$$\cdot\log\frac{R}{2r}\leqslant C_6N^{2n+s+4}-C_7\frac{N^sT}{2^s}\log N,$$

$$|F_\tau(h)|\leqslant \exp\left(\frac{1}{2^{s+1}}N^{2n+s+4}\log N\right). \quad (16)$$

另一方面，$F_\tau(h)$是K中的代数数，而且它的分母和模分别是

$$m(F_\tau(h))\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}m(\beta_i)\right)^T\cdot\left(\prod_{j=1}^{n+1}m(\alpha_j)\right)^{Lh}$$

$$\leqslant e^{N^{2n+s+4}} \quad (17)$$

$$\overline{|F_\tau(h)|}\leqslant(L+1)^{n+1}e^{N^{2n+4}}\quad L^TC_1{}^TC_2{}^{Lh}$$

$$\leqslant e^{N^{2n+4+s}}. \quad (18)$$

由上二估计式，利用第二章引理4可以知道，如果$F_\tau(h)\neq 0$，那么应有

$$\log|F_\tau(h)|\geqslant-(d-1)N^{2n+4+s}-dN^{2n+4+s}$$
$$>-2dN^{2n+4+s}.$$

这与（16）式矛盾，所以，必是$F_\tau(h)=0$

对于$0\leqslant\tau_1+\cdots+\tau_n<\frac{T}{2^s}$，$0\leqslant h<N^{s+1}$成立．即（14）式对于$s$是成立的．

（ii）的结论由归纳法得证．

（iii）由上面的结论及（15）式可以看出，在（10）式成立的条件下，函数$F(z)$满足

$$\frac{d^k}{dz^k}F(z)\Big|_{z=h}=0,0\leqslant k<\frac{T}{2^{2(n+1)^2}},$$

$$0\leqslant h<N^{2(n+1)^2-1}.$$

因此，若以$n(F)$表示$F(z)$在$|z|\leqslant N^{2n^2+4n+8}$中的零点个数，那么

$$n(F) \geqslant \frac{T}{2^{2(n+1)^2}} \cdot N^{2n^3+4n+8} > N^{2n^3+6n+6}. \tag{19}$$

另一方面，$F(z)$是一个指数多项式，

$$F(z) = \sum_{k=1}^{M} b_k e^{w_k z},$$

其中$M=(L+1)^{n+1}$，而 w_k 具有

$$\lambda_1 \log\alpha_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\log\alpha_{n+1}$$

的形式．由于$\log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_{n+1}$在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关，所以 w_k 互不相同，此外，有估计式

$$\Omega = \max|w_k| \leqslant C_8 L = C_8 N^{2n+2},$$

因此，由引理2可知

$$n(F) \leqslant 2((L+1)^{n+1}-1) + 5 \cdot N^{2n^2+4n+3}$$

$$\cdot C_8 N^{2n+2} < C_9 N^{2n^3+6n+6},$$

这与（19）式矛盾．这矛盾说明，（10）式不可能成立，由此证得定理1′．

证毕。

利用本节的方法，使用更为精细的估计，则可给出线性形式（1）的下界估计。这样的估计可用于许多理论问题和实际问题的研究，例如对不定方程的研究．

下面，举出一个关于线性形式下界估计的定理。

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是不为零或1的代数数，$\beta_0, \cdots, \beta_n$是不全为零的代数数，设它们的次数不超过$d$，$\alpha_i$的高是$A_i(\geqslant 4)$，$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\beta_j(1\leqslant j\leqslant n)$的高不超过$B(\geqslant 4)$，并记

$$\Omega = A_1 A_2 \cdots A_n.$$

定理5　若（1）式中的线性形式$\Lambda \neq 0$，则必有估计式

$$|\Lambda|>(B\Omega)^{-C\Omega\log\Omega'},$$

其中

$$C=(16nd)^{200n},\Omega'=\Omega/\log A_n.$$

此外，如果$\beta_0=0$且β_1，…，β_n是有理整数，那么当$\Lambda\neq0$时，有

$$|\Lambda|>B^{-C\Omega\log\Omega'}.$$

关于这一定理的证明及其他有关的结果，有兴趣的读者可参看有关专著或文献(如例，A.Baker，《*Transcendental number theory*》)。

第七章 超越性度量

本章首先给出超越数的一个必要条件，即代数数的充分条件．此后，引进超越性度量与逼近度，并指出它们之间的关系，以及代数数对数的线性形式下界与超越性度量研究的某些联系．

做为研究超越性度量的例子，给出了数 e 的一个超越性度量．

第一节 超越数的必要条件

引理 1．设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别是次数为 p 与 q，高为 h_1，h_2 的有理整系数多项式，它们没有非常数公因子．则对于任意复数 z，有

$$\max(|P(z)|,|Q(z)|)\geqslant(p+q)^{-\frac{1}{2}(p+q)}\cdot h_1^{-q}\cdot h_2^{-p}.$$

证明．设

$$P(x)=a_0x^p+\cdots+a_p,$$
$$Q(x)=b_0x^q+\cdots+b_q,$$

那么，由于它们没有公共零点，所以它们的结式不为零．

因此

$$R\neq 0,$$

此处

$$R = \begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ b_q & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & b_q & \cdots & b_0 \end{vmatrix}.$$

首先考虑 $|z| \leqslant 1$ 的情形. 将上面的行列式的第 i（$2 \leqslant i \leqslant p+q$）列乘以 z^{i-1} 并且将它们都加到第一列，就得到

$$R = \begin{vmatrix} p(z) & a_{p-1} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ zp(z) & a_p & \cdots\cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ z^{q-1}p(z) & \cdots\cdots & a_p & \cdots & & & a_0 \\ Q(z) & b_{q-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ z^{p-1}Q(z) & \cdots & \cdots & b_q & b_{q-1} & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

由于 $R \neq 0$，所以 $|R| \geqslant 1$，因此，利用Hadamard不等式可以得到

$$1 \leqslant R \leqslant \max(|P(z)|, |Q(z)|) h_1^q \cdot h_2^p (p+q)^{\frac{1}{2}(p+q)},$$

于是证明了引理.

对于 $|z| \geqslant 1$ 的情形，可以将行列式 R 的第 i 行乘以 $z^{-(p+q)+i}$，然后加到最后一列，仍可得出引理结论.

证毕.

引理2 设 z 是任意复数，$P(x)$ 是高为 h，次数为 n 的有理整系数多项式，$P(x) \neq 0$，而且 $|P(z)| < 1$. 则存在自然数 k 与不可化的非常数多项式 $Q(x)$，具有有理整系数，

而且满足下面的条件：

(i) $Q^h(x)|P(x)$，即存在有理整系数多项式 $H(x)$，使得 $P(x)=Q^h(x)H(x)$；

(ii) $|Q(z)|^h\leqslant|P(z)|\cdot e^{2n(n+\log h)}$.

证明．记

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\cdots P_m(x),$$

其中 $P_i(x)$ 是某个有理整系数不可化多项式的幂，而且 $P_i(x)$与$P_j(x)$（$i\neq j$）没有非常数公因子.

不妨假设 $m\geqslant 2$，$n\geqslant 2$，而且

$$|P_1(z)|\leqslant|P_2(z)|\leqslant\cdots\leqslant|P_m(z)|.$$

由

$$|P(z)|=\prod_{i=1}^{m}|P_2(z)|<1$$

可知，必存在自然数 l，使得

$$|P_1(z)\cdots P_{l-1}(z)|\geqslant|P_l(z)\cdots P_m(z)|,$$
$$|P_1(z)\cdots P_l(z)|<|P_{l+1}(z)\cdots P_m(z)|.$$

令

$$R_1(x)=P_1(x)\cdots P_{l-1}(x),$$
$$R_2(x)=P_l(x)\cdots P_m(x),$$

并设它们的次数和高分别是 n_1,n_2 与 h_1,h_2，则由引理1得到

$$|R_1(z)|\geqslant h_1^{-n_2}h_2^{-n_1}n^{-\frac{1}{2}n}.$$

由此，并由第二章定理5的证明过程可见到

$$|R_1(z)|\geqslant(h_1h_2)^{-n}n^{-\frac{1}{2}n}\geqslant\left(\frac{(n+1)2^{n-2}}{\sqrt{n}}h\right)^{-n}.$$

同理可得

$$|P_{l+1}(z)\cdots P_m(z)| \geqslant \left(\frac{(n+1)2^{n-2}}{\sqrt{n}}h\right)^{-n}.$$

因此，由

$$P(z) = \prod_{i=1}^{l-1} P_i(z) \cdot P_l(z) \cdot \prod_{i=l+1}^{m} P_i(z),$$

得到

$$|P_l(z)| \leqslant |P(z)| \cdot \left(\frac{(n+1)2^{n-2}}{\sqrt{n}}h\right)^{2n}$$

$$\leqslant |P(z)| e^{2n(n+\log h)}.$$

显然 $P_l(x)$具有 $Q^h(x)$的形式，而且，由于

$$|Q(z)| < 1, \quad Q(x) \neq 0,$$

所以 $P_l(x)$不是常数.

证毕.

定理 1. 设 ξ 是超越数，$P_i(x)$（$i \geqslant 1$）是次数为 n_i、高为 h_i 的有理整系数多项式，而且

$$n_i < n_{i+1} \leqslant C_1 n_i, \quad \log h_i < \log h_{i+1} \leqslant C_2 \log h_{i+1} \quad (i \geqslant 1), \quad (1)$$

其中 C_1, C_2是常数，则存在无穷多个 i 值及常数 C_3，使得

$$\log |P_i(\xi)| \geqslant -C_3 n_i (n_i + \log h_i).$$

证明. 若定理结论不成立，那么对于任意的正数 C_3 存在自然数 i_0，使得当 $i \geqslant i_0$时，恒有

$$\log P_i(\xi)| < -C_3 n_i (n_i + \log h_i),$$

$$|P_i(\xi)| < 1.$$

由引理2，存在不可化多项式的幂 $Q_i(x) | P_i(x)$，使得

$$\log|Q_i(x)| < \log|P_i(x)| + 2n_i(n_i + \log h_i)$$

$$< -(C_3 - 2)n_i^2 - (C_3 - 2)n_i \log h_i. \tag{2}$$

此外，由第二章引理5可知 $Q_i(x)$的高 $\bar{h}_i$ 不超过 $e^{n_i}h_i$。

下面证明存在正整数 i_1，使得当 $i \geqslant i_1$ 时所有的$Q_i(x)$都是同一个不可化多项式 $Q(x)$的幂（不计常数因子）.

事实上，若 $Q_i(x)$ 与 $Q_{i+1}(x)$没有非常数的公因式，那么，由引理1可知对于任意的z，

$$\max(|Q_i(z)|, |Q_{i+1}(z)|) > (n_i + n_{i+1})^{-\frac{1}{2}(n_i + n_{i+1})} \bar{h}_i^{-n_{i+1}} \bar{h}_{i+1}^{-n_i}. \tag{3}$$

因此

$$\log|Q_i(z)| > -\frac{1}{2}(n_i + n_{i+1})\log(n_i + n_{i+1}) - n_{i+1}\log\bar{h}_i - n_i\log\bar{h}_{i+1}, \tag{4}$$

或者

$$\log|Q_{i+1}(z)| > -\frac{1}{2}(n_i + n_{i+1})\log(n_i + n_{i+1}) - n_{i+1}\log\bar{h}_i - n_i\log\bar{h}_{i+1}. \tag{5}$$

若（4）式成立，则由（1）式得到

$$\log|Q_i(z)| > -\frac{1}{2}(1 + C_1)n_i\log(n_i(1 + C_1)) - C_1 n_i(n_i + \log h_i) - n_i(n_{i+1} + \log h_{i+1})$$

$$> -\frac{1}{2}(1 + C_1)n_i\log(n_i(1 + C_1))$$

$$-C_1n_i(n_i+\log h_i)-n_i(C_1n_i+C_2\log h_i).$$

当 C_3 充分大时，上式与（2）式矛盾

若（5）式成立，当 C_3 充分大时，同样可以得到与(2)式矛盾的不等式。

这样，我们看到，只要取 C_3 充分大，那么必存在不可化多项式 $Q(x)$，对于 $i\geqslant i_0$ 有

$$Q_i(x)=a_i^{(k)}(Q(x))^k,\quad a_i^{(k)}\in Z$$

显然 $k\leqslant n_i$，因此（2）式给出

$$\log|Q(\xi)|<-(C_3-2)n_i-(C_3-2)\log h_i,\ i\geqslant i_0.$$

由此可见 ξ 应满足

$$Q(\xi)=0,$$

这与 ξ 是超越数的假设矛盾，从而证得定理.

证毕.

第二节　超越性度量

以 $\mathfrak{M}(n,h)$ 表示次数 $\leqslant n$、高 $\leqslant h$ 的有理整系数多项式所成的集合. 对于任意复数 ξ，记

$$\Phi(\xi;n,h)=\min_{P\in\mathfrak{M}(n,h)}|P(\xi)|.$$

如果 ξ 是代数数，那么，当 $n\geqslant n_0$，$h\geqslant h_0$ 时，应有 $\Phi(\xi;n,h)=0$. 如果 ξ 是超越数，那么，对于任意的 n 与 h，都是 $\Phi(\xi;n,h)>0$.

定义 1　设 ξ 是超越数. 若存在正值函数 $f(x,y)$，使得对于任意的非常数多项式 $P(x)\in\mathfrak{M}(n,h)$，有

$$|P(\xi)|>f(n,h)$$

对于一切 $n\in\mathrm{N}$，$h\in\mathrm{N}$ 成立，则称 $f(n,h)$ 是 ξ 的超越性度

量函数，或称为超越性度量．

由 Dirichlet 原则，容易给出超越性度量的一个上界估计．

定理2 若 $f(N,H)$ 是 ξ 的超越性度量，则

$$f(N,H)\leqslant\begin{cases}e^{\lambda_1 N}\cdot H^{-N}, & \xi\in\mathbf{R},\\ e^{\lambda_2 N}\cdot H^{-\frac{1}{2}(N+1)}, & \xi\notin\mathbf{R},\end{cases}\qquad(6)$$

其中 λ_1,λ_2 是只与 ξ 有关的常数．

证明．若 $\xi\in\mathbf{R}$．令

$$y=C_0+C_1\xi+\cdots+C_N\xi^N.$$

显然，对于每一组有理整数 $C_0,\cdots,C_N$，$0\leqslant C_i\leqslant H$ $(0\leqslant i\leqslant N)$，有唯一的一个 y 值与之对应，而且

$$H\sum_{i=0}^{N}\min(0,\xi^i)\leqslant y\leqslant H\sum_{i=0}^{N}\max(0,\xi^i).$$

因此，所有的 y 落在一个长度为 $H(1+|\xi|+\cdots+|\xi|^N)$ 的区间内．由于有 $(H+1)^{N+1}$ 组不同的 $(C_0,\cdots,C_N)$，所以，由 Dirichlet 原则，至少有二组不同的

$$C_0^{(i)},\ \cdots,\ C_N^{(i)}\qquad(i=1,2)$$

所对应的 y 值的距离不超过

$$(H+1)^{-(N+1)}\cdot H(1+|\xi|+\cdots+|\xi|^N).$$

取

$$C_i=C_i^{(1)}-C_i^{(2)}\qquad(0\leqslant i\leqslant N),$$

则 $|C_i|\leqslant H$，而且

$$\left|\sum_{i=0}^{N}C_i\xi^i\right|\leqslant(H+1)^{-(N+1)}\cdot H\cdot\sum_{i=0}^{N}|\xi|^i$$

$$<e^{\lambda_1 N}H^{-N},$$

其中 $\lambda_1=\lambda_1(\xi)$. 由此得到定理关于实超越数的结论。

如果 $\xi\notin\mathbf{R}$，那么，令 $\xi^k=a_k+ib_k$，则

$$y=C_0+\cdots+C_N\xi^N=C_0a_0+\cdots+C_Na_N$$
$$+i(C_0b_0+\cdots+C_Nb_N),$$

由此并利用前面的方法，即可得到定理关于非实数的超越数的结论.

证毕。

在关于超越性度量的定义中，集合$\mathfrak{M}(n,h)$包含了一切次数$\leqslant n$、高$\leqslant h$的多项式. 下面的定理指出，在研究超越性度量时可以只考察不可化多项式.

定理 3 设 $\varphi(x,y)$是定义在 $x\in\mathbf{N}$, $y\in[1,\infty)$ 上的实值函数，且满足条件：

(i) $\varphi(n+m,s+t)\geqslant\varphi(n,s)$对于自然数 n，非负整数 m，以及 $s\geqslant 1$，$t\geqslant 0$ 成立；

(ii) $\varphi(n,s)\geqslant ns$，$n\in\mathbf{N}$，$s\geqslant 2$；

(iii) $\varphi(\rho n,\rho s)\geqslant\rho\varphi(n,s)$，$n\in\mathbf{N}$，$s\geqslant 1$，$\rho\in\mathbf{N}$.

设 ξ 是超越数. 如果对于一切非常数的不可化多项式 $Q(x)\in\mathbf{Z}[x]$，有

$$|Q(\xi)|>\exp(-\varphi(d(Q),s(Q))),$$

则对于一切非常数的多项式 $P(x)\in\mathbf{Z}[x]$，有

$$|P(\xi)|>\exp(-2\varphi(d(P),2s(P))),$$

其中，对于多项式 $R(x)\in\mathbf{Z}[x]$，记 $d(R)$, $h(R)$ 分别为它的次数与高，而且

$$s(R)=d(R)+\log h(R).$$

证明 假设存在非常数多项式 $P(x)\in\mathbf{Z}[x]$，使得定理结论不成立，记它的高与次数分别为 h_1,d_1，并记 $s_1=d_1+$

$\log h_1$，则

$$|P(\xi)|\leqslant\exp(-2\varphi(d_1,2s_1)).$$

由引理2，存在非常数的不可化多项式 $Q(x)\in\mathbf{Z}[x]$及 $k\in\mathbf{N}$，使得

$$Q^k(x)\,|\,P(x),$$

而且

$$|Q(\xi)|^k\leqslant|P(\xi)|\cdot e^{2d_1(d_1+\log h_1)}$$

$$=|P(\xi)|\,e^{2d_1s_1}\leqslant\exp(-2\varphi(d_1,2s_1)+2d_1s_1). \quad (7)$$

由假设条件(ii)，

$$\varphi(d_1,2s_1)\geqslant 2d_1s_1,$$

所以（7）式给出

$$|Q(\xi)|^k\leqslant e^{-\varphi(d_1,2s_1)},$$

$$|Q(\xi)|\leqslant e^{-\frac{1}{k}\cdot\varphi(d_1,2s_1)}. \quad (8)$$

设 $Q(\xi)$的次数为 d_2，高为 h_2，由第二章定理5，

$$h_2^k\leqslant e^{d_1}h_1.$$

由此及显然的不等式 $d_2\leqslant\frac{d_1}{k}$，推知

$$s_2=d_2+\log h_2\leqslant\frac{d_1}{k}+\frac{1}{k}(d_1+\log h_1)$$

$$<\frac{2}{k}(d_1+\log h_1)=\frac{2}{k}s_1.$$

利用此不等式及假设条件和（ 8 ）式，得出

$$|Q(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{k}\varphi(kd_2,ks_2)} \leqslant e^{-\varphi(d_2,s_2)}.$$

但 $Q(x)$ 是不可化 多项式，上面的不等式是不可能的，从而得到定理的结论.

证毕.

对于超越数 ξ，还可给出另一种度量.

定义 2 以 $M(n,h)$ 表示所有次数 $\leqslant n$,高 $\leqslant h$ 的非常数的有理整系数多项式的零点的集合，如果存在函数 $g(x,y)>0$，使得

$$\min_{\alpha\in M(n,h)} |\alpha-\xi| > g(n,h)$$

对一切 $n\in\mathbf{N}$, $h\in\mathbf{N}$ 成立，则称 $g(n,h)$ 是 ξ 的逼近度函数，或逼近度.

为了说明超越 性度量与 逼近度的 关系，需要 下面的引理.

引理 3 设 $Q(x)$ 是不可化的有理整 系数多项式，它的次数为 n，高为 h，α 是它的零点，则对于 $n\geqslant 2$，有

$$|Q'(\alpha)| \geqslant \left(\frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (L(Q))^{-(n-2)} \cdot \max(1,|\alpha|)^{n-2}.$$

证明. 设

$$Q(x)=q_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),$$

并设 $\alpha_1=\alpha$. 以 $D(Q)$ 表示 $Q(x)$ 的判别式，则

$$|D(Q)| = |q_0|^{2n-4}\prod_{i<j}|\alpha_i-\alpha_j|^2$$

$$= |Q'(\alpha)|^2 \cdot |q_0|^{2n-4} \prod_{\substack{i<j \\ i\neq 1}} |\alpha_i - \alpha_j|^2 .$$

由第三章引理4（取 $n = 2$）及第二章引理5，得到

$$|q_0|^{2n-4} \prod_{\substack{i<j \\ i\neq 1}} |\alpha_i - \alpha_j|^2$$

$$= |q_0|^{2n-4} \prod_{i=2}^{n} \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |\alpha_i - \alpha_j|$$

$$= |q_0|^{n-3} \prod_{i=2}^{n} \Big(|q_0| \cdot \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq 2}}^{n} |\alpha^i - \alpha^j|\Big) \leqslant |q_0|^{n-3}$$

$$\cdot \prod_{i=2}^{n} \Big(\frac{n(n-1)}{2} L(Q) \max(1, |\alpha_i|)^{n-2} \max(1, |\alpha|)^{-1}$$

$$\cdot \max(1, |\alpha_i|)^{-1}\Big) = |q_0|^{n-3} \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{n-1}$$

$$\cdot (L(Q))^{n-1} (\max(1, |\alpha|))^{-n+1}$$

$$\cdot \prod_{i=2}^{n} \max(1, |\alpha_i|)^{n-3} = |q_0|^{n-3} \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{n-1}$$

$$\cdot (L(Q))^{n-1} (\max(1, |\alpha|))^{-2n+4}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} \max(1, |\alpha_i|)^{n-3} \leqslant \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{n-1}$$

$$\cdot (L(Q))^{n-1} (\max(1, |\alpha|))^{-2n+4} (L(Q))^{n-3}$$

$$= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{n-1} \cdot (L(Q))^{2n-4} \cdot \max(1, |\alpha|)^{-2n+4}.$$

因此，注意到$|D(Q)| \geqslant 1$，就得到

$$|Q'(\alpha)| \geqslant \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{-\frac{(n-1)}{2}} (L(Q))^{-n+2}$$

$$\max(1, |\alpha|)^{n-2}.$$

证毕.

下面的定理，说明了超越性度量与逼近度的关系.

定理 4. 设ξ是超越数，又设$\varphi(x, y)$与$\psi(x, y)$是定义在$x \geqslant 1$，$y \geqslant 1$上的正值函数，且关于每个变量是增加的.

(i) 若对于任意的高为h的n次代数数α，有

$$|\xi - \alpha| > \exp(-\varphi(n, h)) \tag{9}$$

成立，那么，对于任意的高为h的n次不可化整系数多项式$Q(x)$（$Q(x)$不是常数），有

$$|Q(\xi)| > \exp(-\varphi(n, h) - 3n \cdot \log(n+1) - n\log h). \tag{10}$$

(ii) 若对于任意的高为h的n次不可化整系数多项式$Q(x)$（$Q(x)$不是常数），有

$$|Q(\xi)| > \exp(-\psi(n, h)), \tag{11}$$

那么，对于任意的高为h的n次代数数α，有

$$|\xi - \alpha| > \exp(-\psi(n, h) - 4n - n\log h). \tag{12}$$

证明. 不妨设$n \geqslant 2$.

(i) 设$Q(x)$是定理中的多项式，

$$Q(x) = q_0 x^n + \cdots + q_n = q_0(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n).$$

在诸α_i中，设α_{i_0}与ξ的距离最小，则由假设可知

$$|\xi-\alpha_{i_0}|>\exp(-\varphi(n,h)). \tag{13}$$

另一方面，对于$i\neq i_0$，有

$$|\xi-\alpha_{i_0}|\leqslant|\xi-\alpha_i|,$$

$$|\alpha_i-\alpha_{i_0}|\leqslant|\alpha_i-\xi|+|\xi-\alpha_{i_0}|\leqslant 2|\xi-\alpha_i|,$$

所以，由定理3及（13）式可以推出

$$|Q(\xi)|=|\xi-\alpha_{i_0}|\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}|\xi-\alpha_i|$$

$$\geqslant 2^{-n+1}|\xi-\alpha_{i_0}|\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}|\alpha_i-\alpha_{i_0}|$$

$$=2^{-n+1}|\xi-\alpha_{i_0}|\cdot|Q'(\alpha_{i_0})|$$

$$\geqslant 2^{-n+1}\exp(-\varphi(n,h))\cdot\left(\frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\cdot((n+1)h)^{-n+2}=2^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}(n(n-1))^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\cdot(n+1)^{-n+2}\cdot h^{-n+2}\exp(-\varphi(n,h))$$

$$>2^{-\frac{n}{2}}(n(n-1))^{-\frac{n-1}{2}}(n+1)^{-n+2}h^{-n+2}$$

$$\cdot\exp(-\varphi(n,h))>\exp\Big(-\varphi(n,h)-\frac{n}{2}$$

$$-2n\log(n+1)-n\log h\Big),$$

由此易得（10）式.

(ii) 设α是高为h的n次代数数，其最小多项式是$Q(x)$.由假设可知

$$|Q(\xi)|>\exp(-\psi(n,h)).$$

不妨假定$|\xi-\alpha|<1$. 由代数数的性质可知

$$|\xi|<|\alpha|+1\leqslant h+2.$$

另一方面，由中值定理得到

$$Q(\xi)-Q(\alpha)=Q'(\eta)(\xi-\alpha),$$

$$\eta=\alpha+\theta(\xi-\alpha),\quad |\theta|<1.$$

由此及显然的不等式

$$|Q'(\eta)|\leqslant n^2h(h+2)^{n-1}=n^2h^n\left(1+\frac{2}{h}\right)^{n-1}$$

$$\leqslant 3^{n-1}n^2h^n\leqslant e^{4n+n\log h},$$

即可得到（12）式.

证毕.

定理4不仅指出了超越性度量与逼近度的内在联系，而且使得某些数的超越性度量的研究可以归结为寻求某个相应的线性形式的下界.

设α，β是任意复数，而且

$$|\beta-e^{\alpha}|\leqslant r|e^{\alpha}|,\quad\left(r<\frac{1}{2}\right).$$

以$\log w$表示对数函数取主值的一支，那么，由熟知的不等式

$$\sup_{|z|\leqslant\frac{1}{2}}|\log(1+z)|<\frac{1}{2}$$

及最大模原则可以得到

$$\sup_{|z|\leq r}\left|\frac{1}{z}\log(1+z)\right|<\frac{1}{2r},$$

$$|\log(1+z)|<\frac{1}{2r}|z| \qquad (|z|\leq r).$$

因此，当$|\beta e^{-\alpha}-1|\leq r\left(<\frac{1}{2}\right)$时，

$$|\log(\beta e^{-\alpha})|=|\log(\beta e^{-\alpha}-1+1)|$$

$$<\frac{1}{2r}|\beta e^{-\alpha}-1|,$$

$$|\beta-e^{\alpha}|>2r|e^{\alpha}|\cdot|\log\beta-\alpha|. \qquad (14)$$

由此可见，若取β为代数数，$\alpha=\pi$，则

$$|\beta-e^{\pi}|>2r\cdot|e^{\pi}|\cdot\left|\log\beta-\frac{1}{i}\log(-1)\right|,$$

即由右方的线性形式的下界 估计可以得 到超越数 e^{π} 的逼近度.

在（14）中，若取β为代 数 数，$\alpha=\xi\log\eta$，（ξ与η是代数数），则当$|\beta\eta^{-\xi}-1|\leq r<\frac{1}{2}$时，

$$|\beta-\eta^{\xi}|>2r\cdot|\eta^{\xi}|\cdot|\log\beta-\xi\log\eta|,$$

同样可由右方的线性形式的下界得到 η^{ξ} 的逼近度.

类似地，可以考虑形如

$$w=\frac{\beta_0+\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n}{\beta_0'+\beta_1'\log\alpha_1'+\cdots+\beta_n'\log\alpha_n'},$$

$$(\beta_0'+\cdots+\beta_n'\log\alpha_n'\neq 0),$$

以及

$$e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

的逼近度，其中诸α_i, α_i'，是非零代数数，β_i, β_i'是任意的代数数。

在某些特殊情形，逼近度本身就是一个线性形式的下界，例如

$$|\pi - \log\alpha| = |\log(-1) + i\log\alpha|.$$

第三节　e 的超越性度量

对于具体的超越数θ，寻求其超越性度量的方法有其特殊性，很难找到一个通用的方法．一般地，凡确定θ的超越性的方法都可用来寻找其超越性度量．在本节中，给出e的一个超越性度量，所使用的方法，是将第四章中所使用的方法精密化．

引理 4．设

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbf{Z}[x],\ P(x) \neq 0,$$

则对于任意的自然数j及复数z，$Rez > 0$，有：

$$A_{k0}(z)P(e^z) = \sum_{i=0}^{n} a_i A_{ki}(z) - \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_{ki0}, \tag{15}$$

其中

$$A_{kl}(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{(n+1)j-\lambda-1} B_k^{(\lambda)}(l) \quad (k, l = 0, 1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

$$\Phi_{klm}(z)=z^{(n+1)l}e^{(l+m)z}\int_{l}^{m}B_k(t)e^{-zt}dt,$$

$$\text{(17)}$$

$$B_k(t)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(t-i)^l(t-k)^{l-1}\qquad(k=0,1,\cdots,n).$$

$$\text{(18)}$$

证明.对任意的复数 z，$Rez>0$，设 l 是自然数，则由分部积分得到：

$$\int_{t}^{\infty}B_k(t)e^{-zt}dt=-\frac{1}{z}\int_{t}^{\infty}B_k(t)de^{-zt}$$

$$=\frac{1}{z}e^{-zt}B_k(t)+\frac{1}{z}\int_{t}^{\infty}e^{-zt}B_k'(t)dt=\cdots$$

$$=e^{-zt}\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{-\lambda-1}B_k^{(\lambda)}(t),\qquad(k=0,1,\cdots,n).$$

因此，由（17）式可知：

$$\Phi_{klm}(z)=z^{(n+1)l}e^{(l+m)z}\Big(e^{-lz}\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{-\lambda-1}B_k^{(\lambda)}(l)$$

$$-e^{-mz}\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{-\lambda-1}B_k^{(\lambda)}(m)\Big)$$

$$=e^{mz}A_{kl}(z)-e^{lz}A_{km}(z).$$

令 $m=0$，则

$$e^{lz}A_{k0}(z)=A_{kl}(z)-\Phi_{kl0}(z),\quad(k,l=0,1,\cdots,n).$$

因此，

$$A_{k0}(z)P(e^z)=\sum_{l=0}^{n}a_lA_{kl}(z)-\sum_{l=0}^{n}a_l\Phi_{kl0}(z).$$

证毕。

引理5．存在自然数 k，$0\leqslant k\leqslant n$，使得

$$L_k(1)=\sum_{l=0}^{n}a_lA_{kl}(1)\neq 0\ .$$

证明．记行列式

$$\begin{vmatrix} A_{00}(z) & A_{01}(z) & \cdots\cdots & A_{0n}(z) \\ A_{10}(z) & A_{11}(z) & \cdots\cdots & A_{1n}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n0}(z) & A_{n1}(z) & \cdots\cdots & A_{nn}(z) \end{vmatrix}=\Delta(z),$$

则 $\Delta(z)$是一个多项式．

由（18）式可知：

$$B_k^{(\lambda)}(l)\begin{cases}=0, & 当\ \lambda<j-1,\ k=l \\ & 或\ \lambda<j,\ k\neq l, \\ \neq 0, & 当\ \lambda=j-1,\ k=l \\ & 或\ \lambda=j,\ k\neq l.\end{cases}$$

因此，若令

$$\delta_{kl}=\begin{cases}1, & 当\ k=l, \\ 0, & 当\ k\neq l,\end{cases}$$

则 $A_{kl}(z)$ 是一个 $nj+\delta_{kl}-1$ 次多项式，它的系数是有理整数，以 $(j-\delta_{kl})!$ 为公因子，而且 z 的最高次幂的系数为：

$$(j-\delta_{kl})!\ \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq l}}^{n}(l-i)^{j-\delta_{kl}}.$$

这样，$\Delta(z)$ 是一个次数不超过 $(n+1)nj$ 的有理整系数多项

式，而且 z 的最高幂的系数是

$$((j-1)!)^{n+1}\prod_{\substack{i,l=0\\i\neq l}}^{n}(l-i)^{j}.$$

另一方面，在行列式 $\triangle(z)$ 中，若将第 $i+1$ 列减去第一列乘以 e^{iz}，则由（15）式可知，除第一列外，其余各列均由形如

$$\Phi_{kl0}(z)=z^{(n+1)j}e^{lz}\int_{l}^{0}B_k(t)e^{-zt}dt$$

的元素构成．显然，$\Phi_{kl0}(z)$在 $z=0$的零点的阶$\geqslant(n+1)j$，因此，$\triangle(z)$在 $z=0$ 的零点的阶 $\geqslant n(n+1)j$．由此与前面的论证可知

$$\triangle(z)=((j-1)!)^{n+1}\prod_{\substack{i,l=0\\i\neq l}}^{n}(l-i)^{j}z^{n(n+1)j},$$

于是$\triangle(1)\neq 0$．但是 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 不全为零，所以必有 $k\in\mathbf{N}$，$0\leqslant k\leqslant n$，使得

$$\sum_{l=0}^{n}a_l A_{kl}(1)\neq 0.$$

证毕．

引理6．下面的估计式成立：

(i) $\quad |L_k(1)|>j^{j-\frac{1}{2}}\cdot e^{-j},\ (j\geqslant 1)$；

(ii) $\quad |\sum_{l=0}^{n}a_l\Phi_{kl0}(1)|\leqslant(n+1)He^{n}\cdot n^{(n+1)j}j^{-1}$，

$$H=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|;$$

(iii) $$|A_{k0}(1)|<3((n+1)j)^{(n+1)j}e^{-(n+1)j}j^{-\frac{1}{2}},$$
$$(j\geqslant 3,\quad n\geqslant 1).$$

证明 （i） 由 $L_k(1)$ 的表达式，可知它是有理整数．此外，由于 $A_{kl}(z)$的系数都可被（$j-1$）！ 整除，所以必有

$$(j-1)!\,|\,L_k(1),$$

$$|L_k(1)|\geqslant(j-1)!=j^{j-\frac{1}{2}}e^{-j}\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{\theta}{12j}}$$
$$>j^{j-\frac{1}{2}}e^{-j}\quad(j\geqslant 1).$$

(ii) 由

$$\Phi_{kl0}(1)=e^{l}\int_{l}^{0}B_k(t)e^{-t}dt$$
$$=-e^{l}\int_{0}^{l}\prod_{i=0}^{n}(t-i)^{j-\delta_{ki}}e^{-t}dt$$

以及（$0\leqslant l\leqslant n$）

$$\left|\int_{0}^{l}\prod_{i=0}^{n}(t-i)^{j-\delta_{ki}}e^{-t}dt\right|\leqslant n^{nj}\int_{0}^{l}|t-k|^{j-1}dt$$
$$\leqslant n^{(n+1)j}j^{-1}$$

即可得证．

(iii) 由引理 4 的证明见到

$$A_{k0}(1)=\int_{0}^{\infty}B_k(t)e^{-t}dt$$
$$=\int_{0}^{\infty}\prod_{i=0}^{n}(t-i)^{j-\delta_{ki}}e^{-t}dt$$
$$=I_1+I_2,\qquad(19)$$

其中

$$|I_1| = \left| \int_n^{\infty} \prod_{i=0}^{n} (t-i)^{j-\delta_{ki}} e^{-t} dt \right|$$

$$\leqslant \int_n^{\infty} t^{(n+1)j-1} e^{-t} dt \leqslant \Gamma((n+1)j)$$

$$< 3\,((n+1)j)^{(n+1)j-\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n+1)j}, \quad (j \geqslant 1),$$

$$|I_2| = \left| \int_0^{n} \prod_{i=0}^{n} (t-i)^{j-\delta_{ki}} e^{-t} dt \right|.$$

对于 $|I_2|$ 使用（ii）中所得到的估计，则由（19）式得出，当 $j \geqslant 3$，$n \geqslant 1$，有

$$|A_{k0}(1)| \leqslant \frac{1}{j} n^{(n+1)j} + \Gamma((n+1)j)$$

$$\leqslant \frac{1}{j} n^{(n+1)j} + 3((n+1)j)^{(n+1)j-\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n+1)j}$$

$$< 3\,((n+1)j)^{(n+1)j} \cdot e^{-(n+1)j} j^{-\frac{1}{2}}.$$

证毕。

定理5．设

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbf{Z}[x], \quad \max|a_i| = H.$$

则对于 $n \geqslant 1$，有 $H_0 = H_0(n)$，使得当 $H > H_0$ 时，有绝对常数 C，使得

$$|P(e)| > \exp\left\{ -\left(n + Cn^2 \frac{\log(n+1)}{\log\log H} \right) \log H \right\}.$$

证明．由引理4—6，得到

$$|P(e)|\geqslant|A_{k_0}(1)|^{-1}\left(|L_k(1)|-\left|\sum_{l=0}^{n}a_l\Phi_{kl_0}(1)\right|\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{3}((n+1)j)^{-(n+1)j}e^{(n+1)j}(j^je^{-j}$$

$$-(n+1)e^n n^{(n+1)j}j^{-\frac{1}{2}}H). \qquad (20)$$

今取 j 是满足条件

$$(j-1)^{j-1}e^{-(j-1)}\leqslant 2(n+1)e^n n^{(n+1)(j-1)}(j-1)^{-\frac{1}{2}}H \qquad (21)$$

的最大自然数，于是

$$j^je^{-j}>2(n+1)e^n n^{(n+1)j}j^{-\frac{1}{2}}H. \qquad (22)$$

由（21）式，有

$$j^je^{-j}=\frac{j-1}{e}\cdot\left(1-\frac{1}{j}\right)^{-j}(j-1)^{j-1}\cdot e^{-(j-1)}$$

$$\leqslant\frac{j-1}{e}\left(1-\frac{1}{j}\right)^{-j}\cdot 2(n+1)e^n n^{(n+1)(j-1)}$$

$$\cdot(j-1)^{-\frac{1}{2}}H\leqslant 9(n+1)e^n n^{(n+1)j}j^{\frac{1}{2}}H.$$

由此及（22）式推得

$$j\log j=\log H+j\log(en^{n+1})+O(\log j), \qquad (23)$$

$$j=\frac{\log H}{\log\log H}(1+o(1))\quad(H\to\infty),$$

其中 O 常数仅与 n 有关.

当 $n\geqslant 1$，$j\geqslant 1$ 时，有

$$\frac{1}{3}(n+1)^{-(n+1)j}e^{(n+1)j}(n+1)e^{n}n^{(n+1)j}j^{-\frac{1}{2}}>1,$$

由此及（20），（22），（23）式，得到

$$|P(e)|>Hj^{-(n+1)j}=He^{-(n+1)j\log j}$$

$$=H\exp\Big(-(n+1)\log H-(n+1)j\log(en^{n+1})$$

$$+O(\log j)\Big)=H^{-n}\exp\Big(-(n+1)\log(n^{n+1})$$

$$\cdot\frac{\log H}{\log\log H}(1+o(1))+O(\log\log H)\Big)$$

$$=H^{-n-\frac{\gamma}{\log\log H}},$$

其中

$$\gamma=(n+1)\log(en^{n+1})(1+o(1))+O\Big(\frac{(\log\log H)^2}{\log H}\Big).$$

易见，对于任意的 $n\geqslant1$，当 $H\geqslant H_0(n)$ 时，可有

$$\gamma<Cn^2\log(n+1),$$

C 是绝对常数. 定理结论由此可得.

证毕.

作为本节的结束，我们指出，利用上面使用的方法及第四章第四节的定理，可以得到数 $\log\alpha$ 的超越性度量，此处 α 为代数数.

第八章　代 数 无 关 性

关于几个数的代数无关性的研究，要在本章中进行讨论.将要考察代数相关的数的某些特点，并对一些具体数的代数无关性做出判断. 此外，介绍了Mahler 关于数的分类.

第一节　Mahler 分类

对多项式P(x)，以$d(P)$与$h(P)$分别表示它的次数与高. 以下，总设$P(x)\neq 0$.

对于任意复数ξ，以$P(x)$表示所有次数不超过n，高不超过h的有理整系数多项式$Q(x)$中使$|Q(\xi)|$取最小值的一个多项式，并且用

$$|P(\xi)|=h^{-n\omega_\xi(n,\ h)} \tag{1}$$

定义函数　$\omega_\xi(n,\ h)$，此外，记

$$\omega_n(\xi)=\limsup_{h\to\infty}\omega_\xi(n,\ h),\ \omega(\xi)=\limsup_{n\to\infty}\omega_n(\xi).$$

记

$$\nu(\xi)=\min\{n;\ n\in\mathrm{N},\ \omega_n(\xi)=\infty\},$$

但如果对所有的自然数n，$\omega_n(\xi)<\infty$，则规定$\nu(\xi)=\infty$.

定义1. （Mahler分类）将所有复数，做如下分类：
称ξ属于

（1）　A类，如果　$\omega(\xi)=0$，$\nu(\xi)=\infty$；

（2） S 类，如果 $0<\omega(\xi)<\infty$，$\nu(\xi)=\infty$；

（3） T 类，如果 $\omega(\xi)=\infty$，$\nu(\xi)=\infty$；

（4） U 类，如果 $\omega(\xi)=\infty$，$\nu(\xi)<\infty$。

定理1. ξ 属于 A 类的充分必要条件，是 ξ 为代数数.

证明. 设 ξ 是实超越数. 记

$$Q(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots\cdots+a_n, \qquad \sum_{i=0}^{n}a_i{}^2\neq 0.$$

于是，对于每一个次数不超过 n，高不超过 h 的非零多项式 $Q(x)$，有一个值 $Q(\xi)$ 与之对应. 显然，满足 $0\leqslant a_i\leqslant h$（$0\leqslant i\leqslant n$）的这种多项式共有 $(h+1)^{n+1}-1$ 个，而且与这种 $Q(x)$ 相应的 $Q(\xi)$ 满足

$$|Q(\xi)|\leqslant h\cdot\max(1,\ |\xi|)^n\cdot(n+1)=c(n,\ \xi)h\equiv ch$$

其中 c 是仅与 ξ，n 有关的常数. 因此，若将区间 $[-ch,ch]$ 分成长度为 $2ch^{-n}$ 的 h^{n+1} 个互不相交的小区间，那么，由 Dirichlet 原则，当 n 和 h 充分大时至少有两个不同的 $Q_i(x)$（$i=1,2$），使得

$$|Q_1(\xi)-Q_2(\xi)|\leqslant 2ch^{-n}.$$

取 $\quad P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)\neq 0$，则

$$d(P)\leqslant n,\ h(P)\leqslant h,\ |P(\xi)|\leqslant 2ch^{-n}.$$

因此，与 ξ 相应的 $\omega_\xi(n,\ h)\geqslant 1$. 可见 ξ 不属于 A 类.

若 ξ 是超越数但不是实数，那么所有的 $Q(\xi)$ 所对应的点落在矩形 $[-c'h,c'h;\ -c'h,c'h]$ 内，此处 $c'=c'(n,\ \xi)$. 因此，若将矩形的两边各分成长度为 $2c'h^{-\frac{n-1}{2}}$ 的 $h^{\frac{n+1}{2}}$ 个互不相交的小区间，就得到 h^{n+1} 个小正方形. 同样由 Dirichlet 原则，当 n，h 充分大时至少有两个不同的多项式 $Q_i(x)$（$i=$

1，2），使得多项式 $Q(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$ 满足

$$|Q(\xi)|\leqslant 2\sqrt{2}\,c'h^{-\frac{(n-1)}{2}}.$$

因此，与 ξ 相应的 $\omega_\xi(n,\ h)\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

以上证明了，若 ξ 是超越数，则不属于 A 类.

现在，设 ξ 是 d 次代数数，由第三章定理3，对于任意的、高 $\leqslant h$，次数 $\leqslant n$ 的多项式 $P(x)$，若 $P(\xi)\neq 0$，则

$$|P(\xi)|\geqslant\frac{1}{D_1{}^n}\cdot\frac{1}{(L(P))^{d-1}}\geqslant\frac{1}{D_1{}^n}\cdot\frac{1}{((n+1)h)^d}$$

其中 $D_1=L(\xi)$. 由此可见，对于任意的 n，h，数 $n\omega_\xi(n,\ h)$ 是一致有界的，因此 $\omega(\xi)=0$，$\nu(\xi)=\infty$，即 ξ 属于 A 类.

证毕.

引理1。设 $P(x)=C_0x^n+\cdots\cdots+C_n\in\mathbf{C}[x]$，它的系数的绝对值不超过 h，则存在某个数 j，$0\leqslant j\leqslant n$，使得对于只与 n 有关的两个常数 $A_1(n)$，$A_2(n)$，有

$$A_1(n)h<|P(j)|<A_2(n)h$$

证明。由方程组

$$P(j)=C_0j^n+\cdots\cdots+C_n,\quad 0\leqslant j\leqslant n,$$

可以将 C_0，C_1，……，C_n 表示为 $P(0)$，…，$P(n)$ 的线性组合

$$C_i=C_{i0}P(0)+\cdots+C_{in}P(n),\quad (0\leqslant i\leqslant n),$$

其中 $C_{ij}=C_{ij}(n)$. 设 $|P(j_0)|=\max|P(j)|$，则由上式推出，存在只与 n 有关的常数 $A_3(n)$，使得

$$h=\max|C_i|<A_3(n)\cdot|P(j_0)|,$$

由此可得引理结论的前半部分，至于引理结论的后半部分，则由

$$|P(j)|\leqslant(n+1)n^n h$$

即可得到.

证毕.

定理 2. 在Lebesgue测度意义下，全体T类数与U类数构成零测度集.

证明. 设ξ是任意复数，$P(x)$是不可化有理整系数多项式，$d(P)\leqslant n$，$h(P)\leqslant h$.

以α表示与ξ有最小距离的$P(x)$的零点，则对$P(x)$的任一零点α'，有

$$|\alpha-\alpha'|\leqslant|\xi-\alpha|+|\xi-\alpha'|\leqslant 2|\xi-\alpha'|,$$

因此

$$|\xi-\alpha|\leqslant 2^n|P(\xi)|\cdot|P'(\alpha)|^{-1} \qquad (2)$$

由第七章引理3容易看出，存在只与n有关的常数$C_1=C_1(n)$，使得对于$n\geqslant 2$有下面的不等式成立：

$$|P'(\alpha)|\geqslant C_1(n)h^{-n} \qquad (3)$$

当 $n=1$时，适当选取$C_1(n)$，上式显然也是成立的。

固定任意正数 $\epsilon<1$.

设ξ是T类或U类中的数.

(i). 首先指出，存在某个自然数n及自然数h，以及次数为n、高为h的不可化有理整系数多项式$P(x)$，使得

$$|P(\xi)|<\frac{\epsilon C_1(n)}{n^3 6^{n+1}}h^{-6n}. \qquad (4)$$

事实上，根据定义1，必存在自然数n与h，以及相应的次数为n，高为h的有理整系数多项式$P(x)$，使得

$$|P(\xi)| < \left(\frac{\epsilon C_1(n)}{n^3 6^{n+1}}\right)^n e^{-6n^2} h^{-6n}. \qquad (5)$$

如果$P(x)$ 是不可化多项式，则（4）式是显然的．

如果$P(x)$是可化的，那么，可以将 它 分 解为 k 个有理整系数不可化多项式之积：

$$P(x) = P_1(x) \cdots P_k(x).$$

设 $P_i(x)$的次数为 n_i，高为 h_i，则 $n_1 + \cdots + n_k = n$，而且，由第二章定理5，

$$h_1 \cdots h_k \leqslant e^n h.$$

如果对于$1 \leqslant j \leqslant k$ ($j \in \mathbf{N}$)都有

$$|P_j(\xi)| \geqslant \frac{\epsilon C_1(n_j)}{n_j^3 6^{n_j+1}} h_j^{-6n_j},$$

那么

$$|P(\xi)| = \prod_{j=1}^{k} |P_j(\xi)| > \left(\frac{\epsilon C_1(n)}{n^3 6^{n+1}}\right)^k \cdot (h_1 \cdots h_k)^{-6n}$$

$$\geqslant \left(\frac{\epsilon C_1(n)}{n^3 6^{n+1}}\right)^n \cdot e^{-6n^2} h^{-6n},$$

这与（5）式矛盾．所以至少有一个$P_i(x)$使得（4）式成立．

(ii)．由（2），（3），（4）式可以看出，在$P(x)$的诸零点中，若α与ξ有最小距离，则

$$|\xi - \alpha| \leqslant 2^n \frac{\epsilon C_1(n)}{n^3 6^{n+1}} h^{-6n} \cdot \frac{1}{C_1(n)} h^n$$

$$= \frac{2^n \epsilon}{n^3 6^{n+1}} h^{-5n} < \frac{\epsilon}{n^3 3^{n+1}} h^{-5n}.$$

以$P(x)$的每个零点为中心做一个半径为 $\frac{\epsilon}{n^3 3^{n+1}}h^{-5n}$ 的园，记这些园的和集为$S(P, n, h)$，并记

$$M(n, h)=\bigcup_{P} S(P, n, h),$$

其中$P(x)$经过所有次数为n、高为h的有理整系数多项式，那么，T类数和U类数都包含在数集

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{h=1}^{\infty} M(n, h)$$

中，显然，$S(P, n, h)$的测度不超过

$$n(2h+1)^{n+1}\pi\left(\frac{\epsilon}{n^3 3^{n+1}}h^{-5n}\right)^2 \leqslant n\,3^{n+1}h^{n+1}$$

$$\cdot\pi\frac{\epsilon}{n^3 3^{n+1}}h^{-5n} \leqslant \epsilon\pi\frac{1}{n^2}h^{-3n}$$

因此，M的测度不超过

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\pi\epsilon\,\frac{1}{n^2}h^{-3n} \leqslant C_2\epsilon,$$

其中C_2是绝对常数.

由ϵ的任意性，即可证得所需结论.

证毕.

定理 3. 若ξ与η满足一个代数数系数的二元代数方程，则它们属于同一数类.

证明. 设

$$Q(\xi, \eta)=0,$$

其中

$$Q(x, y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij} x^i y^j,$$

此处 $a_{ij}(0\leqslant i\leqslant k, 0\leqslant j\leqslant l)$是代数数。

首先注意，不妨假定ξ与η都是超越数，否则，它们都是代数数,从而都属于A类．此外，还可假定诸a_{ij}都是有理整数，否则代替$Q(x, y)$可以考虑多项式

$$\tilde{Q}(x, y) = M\prod_{r=1}^{d}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}^{(r)} x^i y^j\right),$$

其中 $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(d)}$是$a_{ij}$在$\mathbf{K} = \mathbf{Q}(a_{11}, \cdots a_{kl})$上的共轭数，$d = [\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$，$M$是某个有理整数。

此外，还可假 $Q(x, \eta)$的零点$\xi = \xi_1, \cdots, \xi_k$都是超越数，否则，若有一个代数数，其最小多项式为$P(x)$，记

$$Q(x, y) = r_0(x)y^l + r_1(x)y^{l-1} + \cdots + r_l(x),$$

则必有$P(x)|r_i(x)$ $(0\leqslant i\leqslant l)$，因此可以考虑新的多项式

$$\frac{Q(x, y)}{P(x)}.$$

以下用C_1，$C_2\cdots$表示只与n，ξ，η以及$Q(x, y)$有关的常数．

设

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i, \quad a_i\in\mathbf{Z} \quad (0\leqslant i\leqslant n), \quad \max|a_i| = h,$$

$$|P(\xi)| = h^{-n\omega_\xi(n, h)}.$$

对于 $2\leqslant i\leqslant h$,显然有

$$|P(\xi_i)| \leqslant (n+1)h\cdot\max(1, |\xi_i|)^n \leqslant C_1 h.$$

令

$$J=P(\xi_1)\cdots P(\xi_k)=\prod_{\lambda=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\xi_\lambda^{\,i}\right)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_k=0}^{n}b(i_1,\ \cdots,\ i_k)\xi_1^{i_1}\cdots\xi_k^{i_k}, \qquad (6)$$

则

$$|J|\leqslant C_2h^{-n\omega_\xi(n,\ k)+k-1}. \qquad (7)$$

另一方面，J 是关于ξ_1，$\cdots\xi_k$的对称函数，所 以，有

$$J=\sum_{\lambda_1=0}^{n}\cdots\sum_{\lambda_k=0}^{n}P(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k)\,\sigma_1^{\lambda_1}\cdots\sigma_k^{\lambda_k},$$
$$\lambda_1+\cdots+\lambda_k\leqslant n$$

其中σ_1，$\cdots$，σ_k 是关于ξ_1，$\cdots$，ξ_k 的初等对称函数，$P(\lambda_1$，$\cdots$，$\lambda_k)$是有理整数，而且

$$\max|P(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)|\leqslant C_3h^k.$$

但由于

$$Q(x,\ \eta)=q_0(\eta)x^k+\cdots+q_k(\eta),$$

所以 $|\sigma_i|=\left|\dfrac{q_i(\eta)}{q_0(\eta)}\right|=\left|\dfrac{q_i}{q_0}\right|$. 因此，$q_0^nJ$ 是关于 η 的次数不超过nl的多项式，它的高h_1不超过C_4h^k. 根据定义1及(1)与（ 7 ）式，得到

$$h_1^{-nl\,\omega_\eta(nl,\ h_1)}\leqslant C_5^nh^{-n\omega_\xi(n,\ h)+k-1},$$

$$(C_4h^k)^{-nl\omega_\eta(,\ nlh_1)}\leqslant C_5^nh^{-n\omega_\xi(n,\ h)+k-1},$$

因此

$$kl\omega(\eta)\geqslant\omega(\xi).$$

同样地可以证明

$$kl\omega(\xi) \geqslant \omega(\eta).$$

由上二式可知 ξ 与 η 属于同一类.

证毕.

第二节　代数无关性

下面给出的定理，都涉及几个数的代数无关性.

定理 4 . 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 与 η_1, η_2 分别在 Q 上线性无关，则六个数 $e^{\xi_i\eta_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 2)$ 中，至少有一个是超越数.

证明. 设 k 是充分大的自然数，记 $L = [k^{\frac{3}{4}}]$.

假设 $e^{\xi_i\eta_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 2)$ 都是代数数. 以K 表示它们在Q上扩张所成的代数数域，并记 $d = [\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$.

(i). 首先证明，存在不全为零的有理整数 $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $(0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leqslant L)$,

$$\max|p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)| \leqslant C_1^{Lk},$$

使得函数

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}\sum_{\lambda_3=0}^{L} P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, e^{(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3)z}$$

满足条件

$$\Phi(\eta) = \Phi(l_1\eta_1 + l_2\eta_2) = 0 \quad (1 \leqslant l_1, l_2 \leqslant k), \qquad (8)$$

其中 C_1（以及下面的 C_2, C_3, …）是只与诸 ξ, η 有关的常数.

事实上，（ 8 ）式即是

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}\sum_{\lambda_3=0}^{L} p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)e^{(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3)(l_1\eta_1+l_2\eta_2)}$$

$$=0 \qquad (1\leqslant l_1, l_2\leqslant k),$$

这是关于 $N=(L+1)^3$ 个 未 知数 $p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$的$M=k^2$ 个方程. 乘以$C_2{}^{Lk}$, 显然可使上述方程的系数成为 K 中的代数整数 $a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 而且

$$\max\overline{|a(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|}\leqslant C_3{}^{Lk}.$$

因此, 利用第二章定理 4 可以知道, 存在不全为零的有理整数 $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 使得(8)式成立, 而且

$$\max|p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|\leqslant(\sqrt{2}(L+1)^3C_3{}^{Lk})^{\frac{dk^2}{(L+1)^3-dk^2}}$$
$$\leqslant C_1{}^{Lk}.$$

(ii). 其次证明, 设自然数 $m\geqslant k$, 而且(8)式 对于 $1\leqslant l_1, l_2\leqslant m$成立, 则它对于 $1\leqslant l_1, l_2\leqslant m+1$也成立.

令

$$r=\max_{1\leqslant l_1,l_2\leqslant m+1}|l_1\eta_1+l_2\eta_2|+1\leqslant C_4m.$$

由假设条件, $\Phi(z)$在园$|z|\leqslant r$ 中的零点个数不小于m^2, 因此, 在第五章引理1中取 $R=m^{\frac{9}{8}}$, 则由

$$|\Phi|_R\leqslant(L+1)^3C_1{}^{Lk}C_5{}^{Lm^{\frac{9}{8}}}\leqslant C_6{}^{Lm^{\frac{9}{8}}}$$

可以推出

$$\log|\Phi|_r\leqslant Lm^{\frac{9}{8}}\log C_6-m^2\log\frac{m^{\frac{9}{8}}+r^2}{2m^{\frac{9}{4}}r}$$

$$\leqslant k^{\frac{3}{4}} m^{\frac{9}{8}} \log C_6 - m^2 \log (C_7 m^{\frac{1}{8}})$$

$$\leqslant -C_8 m^2 \log m. \qquad (9)$$

另一方面，由于$\Phi(l_1\eta_1+l_2\eta_2)(1\leqslant l_1\leqslant m+1,\ 1\leqslant l_2\leqslant m+1)$是$d$次代数数，所以，若它不为零，则由第二章引理3，及

$$\overline{|\alpha|} = \overline{|\Phi(l_1\eta_1+l_2\eta_2)|} \leqslant (L+1)^3 C_1^{Lk} C_9^{L(m+1)}$$

$$\leqslant C_{10}^{L(m+1)},$$

$$m(\alpha) \leqslant C_{11}^{L(m+1)},$$

可以得到

$$\log|\phi(l_1\eta_1+l_2\eta_2)| \geqslant -(d-1)L(m+1)\log C_{11}$$

$$-dL(m+1)\log C_{10} \geqslant -C_{12} m^{\frac{7}{4}}.$$

这与（9）式矛盾，所以必是

$$\phi(l_1\eta_1+l_2\eta_2)) = 0 \qquad (1\leqslant l_1,\ l_2\leqslant m+1)$$

(iii). 由(i), (ii)的结论可知，对于任意的自然数l_1, l_2，有 $\Phi(l_1\eta_1+l_2\eta_2)=0$. 因此$\Phi(z)\equiv 0$。但$\xi_1,\xi_2,\xi_3$在$\mathbf{Q}$上是线性无关的，$p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$又不全为零，因此$\Phi(\delta)\equiv 0$是不可能的。这个矛盾的出现说明$e^{\xi_i\eta_j}$ $(1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 2)$不会全是代数数.

证毕.

在下面的定理证明中，要用到代数学中关于域的有限扩张的理论。读者可参阅有关教科书，例如B. L. Van der Waerden 的《*Algebra*》(有中译本).

以下，设ξ_1,ξ_2,ξ_3以及η_1,η_2,η_3在$\mathbf{Q}$上都是线性无关的.

首先注意，在数

$$\xi_i,\ e^{\xi_i\eta_j}\qquad (1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 3)\qquad (10)$$

中至少有一个超越数．事实上，显然诸ξ_i与η_j均不为零，因此，若ξ_1，ξ_2，$e^{\xi_1\eta_1}$是代数数，由于ξ_1,ξ_2,ξ_3在$\mathbf{Q}$上线性无关，所以$\frac{\xi_2}{\xi_1}$是非零的代数无理数，从而由第五章定理1可知

$$e^{\xi_2\eta_1}=(e^{\xi_1\eta_1})^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}$$

是超越数．

以ω表示（10）中某一个超越数．假设另外的数都与ω在$\mathbf{Q}$上代数相关，那么，必存在$\mathbf{Q}$的扩张$F_0=\mathbf{Q}(\omega)$上的代数元素ω_1，使得由(10)中的数在$\mathbf{Q}$上扩张而得到的域F同于$\mathbf{Q}(\omega,\ \omega_1)$，即(10)中的每一个数都可表为

$$\sum_{i=0}^{d-1}\frac{P_1(\omega)}{P_2(\omega)}\omega_1^{\ i}\quad (P_1(x)\in\mathbf{Q}[x],\ P_2(x)\in\mathbf{Q}[x])\ (11)$$

的形式，其中ω_1是$F_0=\mathbf{Q}(\omega)$上的某个不可化多项式

$$P(x)=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i x^i\qquad (12)$$

的零点，而且

$$\alpha_i=\sum_{\lambda=0}^{N_i}\beta_{i\lambda}\omega^{\lambda},\quad \beta_{i\lambda}\in\mathbf{Z},\ 0\leqslant i\leqslant d,\ 0\leqslant\lambda\leqslant N_i.$$

由(11)式可以看出，如果(10)中的数都与ω代数相关，那么，存在仅与诸ξ_i和η_j有关的常数

$$M=\sum_{i=0}^{A}\theta_i\omega^i,\quad(\theta_i\in\mathbf{Z},\ 0\leqslant i\leqslant A),$$

使得数$M\xi_i$，$Me^{\xi_i\eta_j}(1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 2)$都可以表示成

$$\sum_{\lambda=0}^{N}\sum_{i=0}^{d-1}a_{\lambda i}\omega^\lambda\omega_1{}^i\quad a_{\lambda i}\in\mathbf{Z}(0\leqslant\lambda\leqslant N,0\leqslant i\leqslant d-1)\ (13)$$

的形式，其中A，N以及诸θ_i与$a_{\lambda i}$的绝对值都不超过某个仅与诸ξ_i及η_i有关的常数M_1。

引理 2．对于任意的自然数n，k，设

$$A_r=\sum_{\lambda=0}^{k}\sum_{i=0}^{d-1}a_{r\lambda i}\omega^\lambda\omega_1{}^i\qquad(1\leqslant r\leqslant n),$$

其中诸$a_{r\lambda i}\in\mathbf{Z}$，又设存在常数$C_1$，使得

$$\max|a_{r\lambda i}|\leqslant C_1,$$

则存在只与ω与ω_1有关的常数C_2，C_3，使得

$$\prod_{r=1}^{n}A_r=\sum_{\lambda=0}^{n(k+C_2)}\sum_{i=0}^{d-1}a_{\lambda i}^{(n)}\omega^\lambda\omega_1{}^i,$$

其中所有的$a_{\lambda i}^{(n)}$都是有理整数，而且它们的绝对值不超过$(C_3C_1k)^n$。

证明．设

$$B_r=\sum_{\lambda=0}^{k_r}\sum_{i=0}^{d-1}b_{r\lambda i}\omega^\lambda\omega_1{}^i,\qquad b_{r\lambda i}\in\mathbf{Z},\ (r=1,2),$$

则

$$B_1B_2=\sum_{\lambda=0}^{k_1}\sum_{\mu=0}^{k_2}\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=0}^{d-1}b_{1\lambda i}\,b_{2\mu j}\,\omega^{\lambda+\mu}\omega_1{}^{i+j}$$

$$=\sum_{s=0}^{k_1+k_2}\sum_{t=0}^{2d-2}\delta_{st}\omega^s\omega_1^t, \qquad (14)$$

其中

$$\delta_{st}=\sum_{\substack{\lambda+\mu=s\\0\leqslant\lambda\leqslant k_1\\0\leqslant\mu\leqslant k_2}}\ \sum_{\substack{i+j=t\\0\leqslant i,j\leqslant d-1}} b_{1\lambda i}b_{2\mu j}.$$

显然

$$\begin{aligned}|\delta_{st}|&\leqslant\min(k_1+1,k_2+1)\cdot d\cdot\max|b_{1\lambda i}|\cdot\max|b_{2\mu j}|\\&\leqslant 2d\cdot\min(k_1,k_2)\cdot\max|b_{1\lambda i}|\cdot\max|b_{2\mu j}|.\qquad(15)\end{aligned}$$

另一方面，由于ω_1是(12)式$P(x)$的零点，所以$P(\omega_1)=0$，因此，存在只与ω和ω_1有关的常数C_4，C_5使得对于$r=0,1,2,\cdots,2d-2$，都有等式

$$\omega_1^r=\sum_{\lambda=0}^{C_4}\sum_{i=0}^{d-1}e_{r\lambda i}\omega^\lambda\omega_1^i,$$

其中 $e_{r\lambda i}\in\mathbf{Z}$，而且 $\max|e_{r\lambda i}|\leqslant C_5$. 由此及(14)，(15)式可以得到

$$B_1B_2=\sum_{s=0}^{k_1+k_2}\omega^s\sum_{t=0}^{2d-2}\delta_{st}\omega_1^t=\sum_{s=0}^{k_1+k_2}\omega^s\sum_{t=0}^{2d-2}\delta_{st}\sum_{\mu=0}^{C_4}\sum_{i=0}^{d-1}e_{r\mu i}\omega^\mu\omega_1^i$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{k_1+k_2+C_4}\sum_{i=0}^{d-1}f_{\lambda i}\omega^\lambda\omega_1^i,$$

其中诸$f_{\lambda i}\in\mathbf{Z}$，而且

$$\begin{aligned}\max|f_{\lambda i}|&\leqslant C_5(2d-1)\max|\delta_{st}|\\&\leqslant 2C_5d\cdot 2d\cdot\min(k_1,k_2)\max|b_{1\lambda i}|\max|b_{2\mu j}|\\&\leqslant C_3\cdot\min(k_1,k_2)\max|b_{1\lambda i}|\max|b_{2\mu j}|.\end{aligned}$$

由此并利用归纳法，即可得到引理结论.

证毕.

定理5．若ξ_1, ξ_2, ξ_3与η_1, η_2, η_3都在Q上线性无关，则（10）式中至少有两个数在Q上是代数无关的.

证明．设(10)式中的某个超越数为ω，并假定另外的数都与ω在Q上代数相关．下面，要由这一假定得出一个矛盾.

以下，设C_1, C_2, …都是只与ω, ω_1有关的常数，k是某个固定的充分大的自然数．记

$$L_0 = [k\log k], L = [k^{\frac{2}{3}}(\log k)^{\frac{1}{2}}], \quad m = [k^{\frac{1}{3}}(\log k)^{\frac{3}{7}}],$$

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda_0=0}^{L_0}\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}\sum_{\lambda_3=0}^{L} P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)$$

$$\cdot \omega^{\lambda_0} e^{(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3)z},$$

其中$P(\lambda)$是有理整数.

(i)．首先证明，存在不全为零的有理整数

$$P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_3) \quad (0 \leqslant \lambda_0 \leqslant L_0, \ 0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leqslant L),$$

满足条件

$$\max|P(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)| \leqslant k^{C_7 k}, \tag{16}$$

并且使得

$$\Phi^{(j)}(\eta) = 0, \quad 0 \leqslant j < k, \tag{17}$$

其中

$$\eta = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + l_3\eta_2, \quad l_i \in \mathrm{N}, \ 1 \leqslant l_i \leqslant m (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

事实上，等式（17）即是

$$\Phi^{(j)}(\eta) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda)\, \omega^{\lambda_0} (\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3)^j$$

$$\cdot e^{(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3)(l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + l_3\eta_3)}$$

$$= \sum_{(\lambda)} P(\lambda)\omega^{\lambda_0}(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_2)^j \cdot \prod_{1\leqslant i,t\leqslant 3} e^{\lambda_i l_t \xi_i \eta_t} = 0$$

它与

$$M^{k\pm 9mL}\Phi^{(j)}(\eta)=0 \tag{19}$$

是等价的．由（13）式及引理2可知，对于 $j\leqslant k$，

$$M^k\omega^{\lambda_0}(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3)^j \quad 与$$

$$M^{9mL}\prod_{1\leqslant i,t\leqslant 3}(e^{\xi_i\eta_t})^{\lambda_i l_t}$$

都可表示为

$$\sum_{r=0}^{N_1}\sum_{i=0}^{d-1} b_{ri}\omega^r\omega_1^i$$

的形式，其中 b_{ri} 是有理整数，并且有下面的估计式：

$$N_1\leqslant C_8 k\log k,$$

$$\max|b_{ri}|\leqslant C_9^{k\log k}.$$

因此，再利用引理2可以推知

$$M^{k\pm 9mL}\omega^{\lambda_0}(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3)^j\prod_{1\leqslant i,t\leqslant 3}(e^{\xi_i\eta_t})^{\lambda_i l_t}$$

可以表示为

$$\sum_{r=0}^{N_2}\sum_{i=0}^{d-1} a_{ri}\omega^r\omega_1^i$$

的形式，此处 a_{ri} 都是整数，而且

$$N_2\leqslant C_{10}k\log k,\ \max|a_{ri}|\leqslant C_{11}^{k\log k}. \tag{20}$$

于是记 $N=C_{10}k\log k$，则对于任意的 j 与 η，

都有

$$M^{k+9mL}\phi^{(j)}(\eta)=\sum_{(\lambda)}P(\lambda)\sum_{r=0}^{N}\sum_{i=0}^{d-1}a_{ri}\omega^r\omega_1{}^i$$

$$=\sum_{r=0}^{N}\sum_{i=0}^{d-1}\omega^r\omega_1{}^i\sum_{(\lambda)}a_{ri}P(\lambda).$$

现在，考虑关于L_0L^3个未知数$P(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$的方程组

$$\sum_{\lambda_0=0}^{L_0}\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}\sum_{\lambda_3=0}^{L}P(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)a_{ri}=0,0\leqslant r\leqslant N,$$

$$0\leqslant i\leqslant d-1,\ 0\leqslant j<k,\ 1\leqslant l_1,l_2,l_3\leqslant m. \qquad (21)$$

当k充分大时，方程组的个数

$$d(N+1)km^8\leqslant d(C_{10}k\log k+1)km^3$$

$$\leqslant C_{12}k^8(\log k)^{\frac{16}{7}}<\frac{1}{2}L_0L^8,$$

因此由第二章定理1可知，当k充分大时存在不全为零的$P(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$是方程组（21）的解，而且由（20）式可知

$$\max|P(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|\leqslant(\max|a_{ri}|)^{\frac{d(N+1)km^8}{L_0L^8-d(N+1)km^8}}$$

$$\leqslant C_{12}{}^{k\log k}.$$

这些$P(\lambda)$当然也满足（16）与（17）式。

(ii). 其次，给出$\Phi(z)$与$\Phi^{(j)}(\eta)$的估计.

以γ与Γ分别表示园$|z|=k$与$|z|=k^{\frac{2}{3}}$. 记

$$A(z)=\prod_{\eta}(z-\eta),$$

其中 $\eta=l_1\eta_1+l_2\eta_2+l_3\eta_3$ $(1\leqslant l_1,\ l_2,\ l_3\leqslant m)$，于是，对于

$z\in\Gamma$，由

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{A(z)}{A(\zeta)}\right)^{k}\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

可以推出

$$|\Phi(z)|=O(1)\prod_{\eta}\frac{(k^{\frac{2}{3}}+|\eta|)^{k}}{(k-|\eta|)^{k}}\cdot\max_{\gamma}|\Phi(z)|$$

由此并利用（16）式，得到：当$\gamma\in\Gamma$时，有估计式

$$\begin{aligned}\log|\Phi(z)|&\leqslant -C_{13}m^{3}k\log\gamma+\log\max_{\gamma}|\Phi(z)|\\&\leqslant -C_{13}m^{3}k\log k+\log((L_{0}+1)\\&\quad\cdot(L+1)^{3}k^{C_{7}k}|\omega|^{L_{0}C_{14}kL})\\&\leqslant -C_{13}m^{3}k\log k+C_{15}kL\\&\leqslant -C_{16}m^{3}k\log k.\end{aligned}\tag{22}$$

由此及 Cauchy 定理，当 $j\leqslant k(\log k)^{\frac{5}{4}}$时，对于（18）式中的$\eta$，有

$$\begin{aligned}|\Phi^{(j)}(\eta)&=\left|\frac{j!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi(z)}{(z-\eta)^{j+1}}dz\right|\\&=O(j^{j}\max_{\Gamma}|\Phi(z)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log|\Phi^{(j)}(\eta)|&\leqslant j\log j-C_{16}m^{3}k\log k\\&\leqslant C_{17}k(\log k)^{\frac{5}{4}}-C_{16}m^{3}k\log k\\&\leqslant -C_{18}m^{3}k\log k\end{aligned}\tag{23}$$

(iii). 由于诸$P(\lambda)$不全为零，而且ξ_1,ξ_2,ξ_3在 Q 上线性无关，所以 $\Phi(z)\neq 0$，因此利用第六章引理 2，可知$\Phi(z)$在γ所界的园域内的零点个数

$$n(0,k)\leqslant C_{10}L^3\leqslant C_{10}k^2(\log k)^{\frac{8}{3}}<m^3 k(\log k)^{\frac{1}{4}}.$$

由此及(ii)的结论可以推出，必有某个$j\leqslant k(\log k)^{\frac{1}{4}}$以及（18）式中的某个$\eta$，使得$\Phi^{(j)}(\eta)\neq 0$，而且满足（23）式。

另一方面，由(i)的证明过程已经见到，$M^{k+8mL}\Phi^{(j)}(\eta)$可以表示成

$$P(\omega,\omega_1)=\sum_{r=0}^{N}\sum_{i=0}^{d-1}a_{ri}\omega^r\omega_1^{\,i}$$

的形式，$a_{ri}\in\mathbf{Z}(0\leqslant r\leqslant N,0\leqslant i\leqslant d-1)$. 现在，视$P(\omega,\omega_1)$为$\omega$与$\omega_1$的多项式，并以$\omega_1,\omega_2\cdots,\omega_d$表示$\omega_1$在$\mathbf{Q}(\omega)$上的全部共轭数，那么

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\prod_{i=1}^{d}P(\omega,\omega_k)$$

就是关于ω的不为零的有理整系数多项式，由（23）式及（16）式可以得到

$$\log|\boldsymbol{P}(\omega)=\log|P(\omega,\omega_1)|+\sum_{i=2}^{d}\log|P(\omega,\omega_k)|$$

$$\leqslant -C_{18}m^8k\log k+C_{19}kL$$

$$\leqslant -C_{20}m^8k\log k$$

$$\leqslant -C_{21}k^2(\log k)^{\frac{16}{7}},\tag{24}$$

而且$\boldsymbol{P}(\omega)$的高与次数分别满足不等式

$$\log h(\boldsymbol{P})\leqslant C_{22}k(\log k)^{\frac{5}{4}},\tag{25}$$

$$n(\boldsymbol{P})\leqslant C_{23}k\log k.\tag{26}$$

这样，若取k_0充分大时，则对于每一个$k\geqslant k_0$，都存在某个有理整系数的非零多项式$P(x)$，满足（24），（25），（26）三个不等式．由第七章定理1，ω应该是代数数，这与ω是超越数矛盾．这一矛盾说明，在（10）式的数中，至少有两个数是代数无关的．

证毕．

对于上面两个定理证明中确定L_0，L，m等数值的方式当然不必拘泥于此处所取数值．以定理4的证明为例，倘使令

$$L=[k^l],\quad R=m^\lambda,$$

那么，在证明的第(i)部分，需要不等式

$$l>\frac{2}{3}$$

在第(ii)部分，则需要

$$\lambda>1,\quad l+\lambda\leqslant 2,\quad l+1\leqslant 2.$$

因此

$$\frac{2}{3}<l\leqslant 1,\quad \lambda>1,\quad l+\lambda\leqslant 2.$$

（在证明中取 $l=\frac{3}{4}$，$\lambda=\frac{9}{8}$）．这一注解当然也适用于以前各章（例如第五章）中所出现过的类似情形．